ABSCHÄTZUNG HARMONISCHER FUNKTIONEN IM R^n

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Hanns - Walter Rohde
aus Berlin

1962

Druck:
Ernst - Reuter - Gesellschaft
der Förderer und Freunde der Freien Universität e.V.
Dissertations - Druckstelle
Berlin-Dahlem, Garystr. 45, Tel.: 76 52 61, App. 668

ABSCHÄTZUNG HARMONISCHER FUNKTIONEN IM R^n

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Hanns - Walter Rohde
aus Berlin

1. Referent: Professor Dr. A. Dinghas
2. Referent: Professor Dr. A. Stöhr

Tag der mündlichen Prüfung: 4. Juli 1962

Tag der Promotion: 19. Dez. 1962

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhaltsverzeichnis.

1. Einleitung 1

§ I

Vorbereitende Tatsachen: ein Mittelwertsatz.

2. Formulierung des Mittelwertsatzes 4

3. Beweis des Mittelwertsatzes 6

§ II

Anwendung auf die Abschätzung harmonischer Funktionen.

4. Konstruktion der Extremalfunktionen 10

5. Eigenschaften der Extremalfunktionen 15

6. Der Fall einseitig unbeschränkter Funktionen 23

§ III

Spezialfälle.

7. Numerische Behandlung von Spezialfällen 32

8. Ein Problem von R. M. Gabriel 40

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548014_0079

ABSCHÄTZUNG HARMONISCHER FUNKTIONEN IM R^n.

1. Einleitung: Die Punkte des n-dimensionalen euklidischen Raumes R^n $(n \geq 2)$ seien durch den Ortsvektor x, gegeben in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, charakterisiert.

In der vorliegenden Arbeit sollen nun Funktionen $u(x)$ untersucht werden, die in $|x| < 1$ der Potentialgleichung

$$\Delta u = 0 \tag{1.1}$$

genügen, die Ungleichungen

$$\overline{\lim_{r \to 1}} u(x) \leq M, \qquad \underline{\lim_{r \to 1}} u(x) \geq -m \qquad (r = |x|) \tag{1.2}$$

mit festen positiven und zunächst endlichen Größen M, m erfüllen und im Nullpunkt eine Entwicklung der Form

$$u(x) = \sum_{\nu=l+1}^{\infty} r^{\nu} \cdot \alpha_{\nu} \qquad (l \geq 0) \tag{1.3}$$

besitzen, wobei die α_{ν} nur von der Richtung von x abhängen.

Die Funktionen, die diesen drei Bedingungen genügen, fassen wir zur Klasse S_l zusammen.

Nach der Herleitung eines für die folgenden Ausführungen fundamentalen Mittelwertsatzes im I. Paragraphen zeigen wir, ausgehend von der Poisson'schen Integralformel, daß jede Klasse S_ℓ eine Extremalfunktion $v(\mathfrak{x})$ enthält, deren Maximum

$$M_\ell(r) = \operatorname{Max}\{v(\mathfrak{x}) \mid |\mathfrak{x}| = r\} \tag{1.4}$$

die Ungleichung

$$u(\mathfrak{x}) \leq M_\ell(r) \qquad (|\mathfrak{x}| = r) \tag{1.5}$$

für alle $u(\mathfrak{x}) \in S_\ell$ befriedigt. Entsprechend läßt sich $u(\mathfrak{x})$ nach unten abschätzen:

$$u(\mathfrak{x}) \geq -m_\ell(r) \qquad (|\mathfrak{x}| = r), \tag{1.6}$$

wobei $-m_\ell(r)$ das Minimum einer Funktion aus S_ℓ auf $|\mathfrak{x}| = r$ ist.

Im 5. Abschnitt werden zunächst die Schranken $M_\ell(r)$ und $m_\ell(r)$ in ihrer Abhängigkeit von den für die Klasse S_ℓ charakteristischen Größen M, m und ℓ untersucht. Wir beweisen dann noch, daß man die Relationen (1.5), (1.6) nicht durch direkte Abschätzung der Koeffizienten von (1.3) hätte gewinnen können. Anschließend werden die Randwerte der Extremalfunktionen betrachtet. Dabei ergibt sich unter anderem, daß die Klasse S_ℓ für geradzahliges ℓ und für $n=2$ Funktionen enthält, die für jedes r auf $|\mathfrak{x}|=r$ die Werte $M_\ell(r)$ und $-m_\ell(r)$ zugleich annehmen.

Schließlich wird die Voraussetzung (1.2) gelockert. Ließe man dieselbe ganz fort, so würde für jede Konstante C mit $u(\mathfrak{x})$ auch $C \cdot u(\mathfrak{x})$ zu S_ℓ gehören. Eine Abschätzung dieser Funktionen auf $|\mathfrak{x}| = r > 0$ wäre daher nicht möglich. Wir behalten deshalb (1.2) bei, lassen aber zu, daß eine der beiden Größen M, m unendlich wird. [1] Die bisherigen Er-

---

1) Für $\ell = 0$ ähnelt diese Fragestellung einem von G. Pick (Über positive harmonische Funktionen. Math.Z.I,1918) behandelten Problem.

gebnisse lassen sich auf diesen Fall übertragen.

Im folgenden Abschnitt werden die Schranken in mehreren Spezialfällen numerisch berechnet.

Abschließend verschärfen wir eine Ungleichung von R.M.Gabriel und schätzen für eine Klasse von Gebieten die Green'sche Funktion $g(\xi,\eta)$ auf $|\xi-\eta|=\text{const}$ nach oben und unten ab. [1)]

---

1) R.M.Gabriel (Further results concerning the level surfaces of the Green's function for a 3-dimensional convex domain (I); J. London Math. Soc XXXII, 1957) hat genauer den Abstand der Punkte mit $g(\xi,\eta)=\text{const}$ von η untersucht. Das ist aber mit oben stehender Problemstellung eng verwandt.

§ I

Vorbereitende Tatsachen: ein Mittelwertsatz.

2. Formulierung des Mittelwertsatzes: Im Laufe unserer Untersuchungen werden wir mehrfach folgenden Tatbestand ausnutzen:

Satz: Die Funktion $f(x)$ sei in dem endlichen offenen Intervall (a,b) stetig und positiv, $\int_a^b f(x)\,dx$ existiere, m sei positive ganze Zahl und q reell mit $-1 < q < 1$.

Dann gibt es reelle Zahlen x_μ mit

$$(2.1) \qquad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < x_{m+1} = b\,,$$

so daß für jedes reelle Polynom $P(x)$, dessen Grad $m-1$ nicht übersteigt, die Gleichung

$$(2.2) \qquad \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu \int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} f(x)\cdot P(x)\,dx = q\cdot\int_a^b f(x)\cdot P(x)\,dx$$

gilt.

Beim Beweis können wir uns offenbar auf $a=0, b=1$ beschränken; denn wendet man den Hilfssatz für diesen Spezialfall auf die Funktion $f(a+x(b-a))$ $(0 < x < 1)$ an, so liefert die Substitution $t = a+x(b-a)$ sofort die allgemeine Aussage.

Ferner genügt es, die Behauptung für die Elemente einer Basis, etwa für $P(x) = x^\nu$ $(\nu = 0,1,\ldots,m-1)$ zu beweisen.

Wir definieren nun folgende Menge von m-tupeln:

$$(2.3) \qquad G_m = \{(x_1,\ldots,x_m) \mid x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < x_{m+1} = 1\}.$$

Dann sind die Funktionen

$$(2.4) \qquad q_{\nu+1} = \Big\{\int_0^1 x^\nu\cdot f(x)\,dx\Big\}^{-1}\cdot\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^\mu\int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} x^\nu\cdot f(x)\,dx \qquad (\nu = 0,1,\ldots,m-1)$$

auf der abgeschlossenen Hülle $\bar{G}_m$ des Gebietes G_m eindeutig definiert und stetig. Auf G_m besitzen sie stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung nach den Veränderlichen x_μ und die von Null verschiedene Funktionaldeterminante

$$(2.5)\qquad \left|\left(\frac{\partial q_\nu}{\partial x_\mu}\right)\right| = 2^m \cdot \prod_{\mu=1}^{m} f(x_\mu) \cdot \left[\prod_{\nu=0}^{m-1} \int_0^1 x_\nu f(x)\,dx\right]^{-1} \cdot \prod_{1\le\varkappa<\lambda\le m} (x_\varkappa - x_\lambda).$$

Die Punktmenge

$$(2.6)\qquad B_m = \{(q_1,\dots,q_m) \mid (x_1,\dots,x_m) \in G_m\}$$

ist daher offen. Da ferner die Funktionen q_ν auf dem Rande Γ_{G_m} von G_m noch stetig sind, gilt für den Rand Γ_{B_m} von B_m

$$(2.7)\qquad \Gamma_{B_m} \subseteq \{(q_1,\dots,q_m) \mid (x_1,\dots,x_m) \in \Gamma_{G_m}\}\ .$$

Schließlich erfüllen die q_ν auf G_m^- die Funktionalgleichungen

$$(2.8)\qquad q_\nu(x_1,\dots,x_{\mu-1},x,x,x_{\mu+2},\dots,x_m) = q_\nu(x_1,\dots,x_{\mu-1},x_{\mu+2},\dots,x_m,1,1),$$
$$q_\nu(0,x_2,\dots,x_m) = -\,q_\nu(x_2,\dots,x_m,1) \qquad (\nu = 1,2,\dots,m)\ .$$

Wir nehmen an, die Relation (2.2) mit $a=0, b=1$ ließe sich für ein $q \in (-1,1)$ durch ein $(x_1,\dots,x_m) \in \Gamma_{G_m}$ erfüllen. Wegen (2.8) ist dies dann auch für ein q_1, das sich von q höchstens ums Vorzeichen unterscheidet, durch einen Punkt der Form

$$(2.9)\qquad (x_1,\dots,x_r,1,\dots,1) \qquad (0<x_1<x_2<\dots<x_r<1\ ;\ r<m)$$

möglich, und zwar für alle Polynome höchstens $(m-1)$-ten Grades, speziell also auch für

$$(2.10)\qquad P(x) = \prod_1^r (x_\varrho - x)\ .$$

Das ist aber wegen

$$\sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu \int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} P(x)\cdot f(x)\,dx = \int_0^1 |P(x)|\cdot f(x)\,dx > q_1 \cdot \int_0^1 P(x)\cdot f(x)\,dx$$

unmöglich. Unsere Annahme war also falsch. Mit anderen Worten gilt für jedes $q \in (-1,1)$ und jedes natürliche $m \geq 1$

$$(2.11)\quad \min_{(x_1,\dots,x_m)\in \Gamma_{G_m}} \sum_{\nu=0}^{m-1} \Big\{ q\cdot\int_0^1 x^\nu\cdot f(x)\,dx - \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu\cdot\int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} x^\nu\cdot f(x)\,dx\Big\}^2 = \delta_m(q) > 0\,.$$

Aus dieser Tatsache folgt unter Berücksichtigung von (2.7) schließlich noch, daß für alle $q \in (-1,1)$

$$(2.12)\qquad (q,q,\dots,q) \notin \Gamma_{B_m}$$

gilt. Die Behauptung des Hilfssatzes ist daher entweder für alle oder für kein q richtig.

Wir können uns deshalb beim Beweis mit dem Fall

$$q = 0$$

begnügen.

3. Beweis des Mittelwertsatzes: Im Falle $a=0$, $b=1$, $q=0$ und $P(x)=x^\nu$ $(\nu = 0,1,\dots,m-1)$ führen wir den Beweis durch vollständige Induktion.

Für $m=1$ ist die Behauptung trivialerweise richtig. Wir nehmen an, sie ist für ein festes $m \geq 1$ erfüllt und bilden die Funktion

$$(3.1)\quad F(x_1,\dots,x_{m+1};C) = C\cdot\sum_{\nu=0}^{m-1}\Big\{\sum_{\mu=0}^{m+1}(-1)^\mu\cdot\int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} x^\nu\cdot f(x)\,dx\Big\}^2 + \Big\{\sum_{\mu=0}^{m+1}(-1)^\mu\cdot\int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} x^m\cdot f(x)\,dx\Big\}^2,$$

wobei $(x_1,\dots,x_{m+1})$ auf G^-_{m+1} variieren und

$$(3.2)\qquad C > \{\delta_m(0)\}^{-1}\cdot\int_0^1 x^m\cdot f(x)\,dx$$

gelten möge. Die Ungleichung (3.2) ist wegen (2.11) sinnvoll. $F(x_1,x_2,\dots,x_{m+1};C)$ ist nun für jedes zulässige C auf G^-_{m+1} stetig, nimmt also ihr Infimum auf G^-_{m+1} an.

Setzt man $x_{m+1}=1$, so läßt sich laut Induktionsvoraussetzung der Faktor von C annullieren. Es gilt daher für jedes C:

$$(3.3)\qquad \min\{F(x_1,\dots,x_{m+1};C)\} < \int_0^1 x^m f(x)\,dx\,.$$

Angenommen für ein zulässiges C wäre

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, 1, 1) \in \bar{G}_{m+1}$$

Minimalstelle. Dann wäre

$$\text{Min}\,\{F(x_1,\ldots,x_{m+1}; C)\} \geq C \cdot \sum_{\nu=0}^{m-1} \Big\{ \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^{\mu} \int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} x^{\nu} f(x)\,dx \Big\}^2$$

$$\geq C \cdot \delta_m(0) > \int_0^1 x^m f(x)\,dx\,.$$

Das steht aber im Widerspruch zu (3.3).

Wenn wir daher jetzt die Annahme machen, daß $F(x_1,\ldots,x_{m+1}; C)$ für alle zulässigen C das Minimum nur auf dem Rande annimmt, so muß dies auf Grund der Funktionalgleichungen (2.8) in einem Punkt der Form

$$(3.4) \qquad (x_1, \ldots, x_m, 1) \qquad (0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < 1)$$

geschehen.

In diesem Punkt müssen die partiellen Ableitungen 1. Ordnung nach den ersten m Variablen verschwinden. Das hat zur Folge, daß das Polynom

$$(3.5) \qquad g(y) = C \sum_{\nu=0}^{m-1} y^{\nu} \Big\{ \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^{\mu} \int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} x^{\nu} f(x)\,dx \Big\} + y^m \Big\{ \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^{\mu} \int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} x^m f(x)\,dx \Big\}$$

die Nullstellen

$$(3.6) \qquad y = x_\mu \qquad (\mu = 1,\ldots,m)$$

besitzt. Da $g(y)$ nach (2.11) nicht identisch verschwinden kann, hat das Polynom die Produktdarstellung

$$(3.7) \qquad g(y) = \Big\{ \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^{\mu} \int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} x^m f(x)\,dx \Big\} \prod_{\nu=1}^{m} (y - x_\nu)$$

mit

$$(3.8) \qquad g(1) \cdot \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^{\mu} \int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} x^m f(x)\,dx > 0\,.$$

Wir behaupten nun

$$(3.9) \qquad (-1)^m g(1) > 0 \qquad \text{für } C > C_o .$$

Anderenfalls gäbe es nämlich eine ins Unendliche strebende Folge (C_n), für die die zugehörige Folge $(x_1^{(n)},\dots,x_m^{(n)})$ etwa gegen $(y_1,\dots,y_m)$ konvergiert, auf der

$$(3.10) \qquad (-1)^m g(1) \leqslant 0$$

gilt. Aus der Abschätzung (3.3) folgt nun für $C \to \infty$

$$\sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu \int_{y_\mu}^{y_{\mu+1}} x^\nu f(x)\,dx = 0 \qquad (\nu = 0,1,\dots,m-1).$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung von (3.8) und (3.10) mit

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^{\mu+m} \int_{y_\mu}^{y_{\mu+1}} x^m f(x)\,dx \\ &= \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu \int_{y_\mu}^{y_{\mu+1}} f(x)\cdot\prod_{\nu=1}^{m}(y_\nu - x)\,dx \\ &= \int_0^1 f(x)\,\Big|\prod_{\nu=1}^{m}(y_\nu - x)\Big|\,dx > 0 \end{aligned}$$

ein Widerspruch, der (3.9) verifiziert.

Aus der Minimaleigenschaft von (3.4) folgt ferner, daß

$$(3.11) \quad \Delta(\eta) = \Big\{4\int_\eta^1 f(x)dx\Big\}^{-1}\{F(x_1,\dots,x_m,\eta;C) - F(x_1,\dots,x_m,1;C)\} \qquad (x_m < \eta < 1)$$

stets positiv ausfällt. Eine einfache Umformung ergibt

$$\begin{aligned} &\Delta(\eta)\int_\eta^1 f(x)\,dx \\ &= C\sum_{\nu=0}^{m-1}\Big\{(-1)^{m+1}\int_\eta^1 x^\nu f(x)\,dx + \sum_{\mu=0}^{m}(-1)^\mu\int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} x^\nu f(x)\,dx\Big\}\cdot\Big\{(-1)^{m+1}\int_\eta^1 x^\nu f(x)\,dx\Big\} \\ &\quad + \Big\{(-1)^{m+1}\int_\eta^1 x^m f(x)\,dx + \sum_{\mu=0}^{m}(-1)^\mu\int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} x^m f(x)\,dx\Big\}\cdot\Big\{(-1)^{m+1}\int_\eta^1 x^m f(x)\,dx\Big\} \end{aligned}$$

mit $x_{m+1} = 1$. Also ist für jedes C:

$$(3.12)\quad 0 \leqslant \lim_{\eta \to 1} \Delta(\eta) = (-1)^{m+1} \Big\{ C \sum_{\nu=0}^{m-1} \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^{\mu} \int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} x^{\nu} f(x)\, dx + \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^{\mu} \int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} x^{m} f(x)\, dx \Big\}$$

$$= (-1)^{m+1} g(1).$$

Zwischen (3.9) und (3.12) besteht ein Widerspruch. Unsere Annahme, daß $F(x_1, \ldots, x_{m+1}\,;\, C)$ für alle zulässigen C das Minimum nur auf dem Rande annimmt, war also falsch.

Es gibt daher ein C, für das $F(x_1, \ldots, x_{m+1}\,;\, C)$ einen Punkt aus G_{m+1}, etwa $(y_1, \ldots, y_{m+1})$ als Minimalstelle besitzt. In diesem Punkte müssen alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von $F(x_1, \ldots, x_{m+1}; C)$ verschwinden. Das wiederum besagt, daß das Polynom

$$(3.13)\quad h(y) = C \sum_{\nu=0}^{m-1} y^{\nu} \cdot \sum_{\mu=0}^{m+1} (-1)^{\mu} \int_{y_\mu}^{y_{\mu+1}} x^{\nu} f(x)\, dx + y^{m} \sum_{\mu=0}^{m+1} (-1)^{\mu} \int_{y_\mu}^{y_{\mu+1}} x^{m} f(x)\, dx$$

die $m+1$ Nullstellen

$$(3.14)\quad y = y_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m+1)$$

besitzt. $h(y)$ muß also das Nullpolynom sein. D.h.

$$(3.15)\quad \sum_{\mu=0}^{m+1} (-1)^{\mu} \int_{y_\mu}^{y_{\mu+1}} x^{\nu} f(x)\, dx = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m).$$

Das ist aber die Behauptung für $m+1$.

Der Beweis des Hilfssatzes ist damit erbracht.

§ II

Anwendung auf die Abschätzung harmonischer Funktionen.

4. Konstruktion der Extremalfunktionen: Wir beginnen nun die Untersuchung der Funktionenklasse S_ℓ zunächst im Falle endlicher M, m.

Für jeden Punkt $\mathfrak{x}$ des Inneren der n-dimensionalen Einheitskugel und jedes $u(\mathfrak{x}) \in S_\ell$ gilt die Poisson'sche Formel

$$(4.1)\quad u(\mathfrak{x}) = \frac{1}{\omega_n} \cdot \int_{|\mathfrak{x}^*|=R} u(\mathfrak{x}^*) \cdot \frac{R^{n-2}(R^2 - r^2)}{(R^2 + r^2 - 2(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}^*))^{n/2}}\, d\omega_n$$

$$(|\mathfrak{x}| = r < R < 1)\ .$$

Definiert man $u^{(\nu)}(\sigma, \delta)$ $(\nu \geq 0)$ als ν-te Ableitung von $u(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{x} = \sigma$ in der Richtung des Einheitsvektors δ, so folgt aus (4.1)

$$(4.2)\quad u^{(\nu)}(\sigma, \delta) = \int_{|\mathfrak{x}^*|=R} u(\mathfrak{x}^*)\, P_\nu(\mathfrak{x}^* \delta)\, d\omega_n \qquad (0 < R < 1)\ ,$$

wobei $P_\nu(x)$ ein Polynom genau ν-ten Grades ist. Für $u(\mathfrak{x}) \in S_\ell$, alle δ und $\nu \leq \ell$ ist

$$u^{(\nu)}(\sigma, \delta) = 0\ .$$

Nach (4.2) ist diese Bedingung äquivalent mit dem Verschwinden der Integrale

$$(4.3)\quad \int_{|\mathfrak{x}^*|=R} u(\mathfrak{x}^*)(\mathfrak{x}^* \delta)^\nu\, d\omega_n = 0 \qquad (0 < R < 1\ ;\ \nu = 0, 1, \ldots, \ell).$$

Die Gleichungen (4.1) und (4.3) in Verbindung mit (1.2) sind aber auch hinreichend dafür, daß $u(\mathfrak{x})$ zur Klasse S_ℓ gehört.

Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ $(0 < |\mathfrak{x}| = r < 1)$. Für jedes R mit $r < R < 1$ und jedes $u(\mathfrak{x})$ folgt dann aus (4.1) und (4.3) die Gleichung

$$(4.4)\quad u(\mathfrak{x}) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\mathfrak{x}^*|=R} u(\mathfrak{x}^*) \cdot \frac{f(R, (\frac{\mathfrak{x}^*}{R} \cdot \frac{\mathfrak{x}}{r}); \lambda_0, \ldots, \lambda_\ell)}{N(R, (\frac{\mathfrak{x}^*}{R} \cdot \frac{\mathfrak{x}}{r}))}\, d\omega_n$$

für beliebige Lagrange'sche Multiplikatoren $\lambda_0,\dots,\lambda_\ell$ und

$$(4.5)\qquad N = N(R,y) = (R^2 + r^2 - 2Rry)^{\frac{n}{2}},$$

$$f = f(R,y;\lambda_0,\dots,\lambda_\ell) = R^{n-2}(R^2 - r^2) - N(R,y)\cdot\sum_{\nu=0}^{\ell}\lambda_\nu y^\nu .$$

Bildet man die zu der durch $\mathfrak{x}$ bestimmten Achse - etwa x-Achse genannt - rotationssymmetrischen Mengen

$$(4.6)\qquad G_1 = G_1(R;\lambda_0,\dots,\lambda_\ell) = \{\mathfrak{x}^* \mid |\mathfrak{x}^*| = R,\ f(R,(\tfrac{\mathfrak{x}^*}{R}\cdot\tfrac{\mathfrak{x}}{r});\lambda_0,\dots,\lambda_\ell) > 0\},$$

$$G_2 = G_2(R;\lambda_0,\dots,\lambda_\ell) = \{\mathfrak{x}^* \mid |\mathfrak{x}^*| = R\} \setminus G_1^- ,$$

so führen (1.2) und (4.4) zu der Abschätzung

$$(4.7)\qquad u(\mathfrak{x}) \leqslant \frac{1}{\omega_n}\cdot\Big(M\cdot\int_{G_1}\frac{f}{N}\,d\omega_n - m\int_{G_2}\frac{f}{N}\,d\omega_n\Big),$$

die sogar für $R=1$ richtig bleibt. Ist daher J_1 die Projektion von $G_1(1;\lambda_0,\dots,\lambda_\ell)$ auf die x-Achse und J_2 die von $G_2(1;\lambda_0,\dots,\lambda_\ell)$, so gilt wegen

$$(4.8)\qquad d\omega_n = d\omega_{n-1}\cdot(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx \qquad (n>2)$$

die Ungleichung

$$(4.9)\qquad u(\mathfrak{x}) \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\Big(M\cdot\int_{J_1}\frac{f}{N}(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx - m\int_{J_2}\frac{f}{N}(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx\Big)$$

für alle $(\lambda_0,\dots,\lambda_\ell)$ und $n\geqslant 2$ $(\omega_1 = 2)$.

Setzt man bei festem $(\lambda_0,\dots,\lambda_\ell) \neq (0,\dots,0)$

$$(4.10)\qquad g(x) = f(1,x;\lambda_0,\dots,\lambda_\ell),$$

so besitzt

$$g'(x) = (1+r^2-2rx)^{\frac{n}{2}-1}\Big[(1+r^2-2rx)\cdot\sum_{\nu=0}^{\ell}\lambda_\nu\cdot\nu\cdot x^{\nu-1} - nr\cdot\sum_{\nu=0}^{\ell}\lambda_\nu x^\nu\Big]$$

im offenen Intervall $\left(-\frac{1+r^2}{2r},\ \frac{1+r^2}{2r}\right)$ höchstens ℓ Nullstellen. Daher hat $g(x)$ im abgeschlossenen Intervall $\left[-\frac{1+r^2}{2r},\ \frac{1+r^2}{2r}\right]$

höchstens $\ell+1$ Nullstellen.

Es sei nun L die Menge aller $(\ell+1)$-tupel $(\lambda_0,\dots,\lambda_\ell)$, für die $g(x)$ genau $\ell+1$ Nullstellen a_ν $(\nu=1,\dots,\ell+1)$ besitzt, die überdies der Zusatzbedingung

$$(4.11)\qquad -1 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_\ell < a_{\ell+1} < a_{\ell+2} = 1$$

genügen.

Hieraus folgt, daß $g(1)$ und $g\left(\frac{1+r^2}{2r}\right)$ gleiches, also positives Vorzeichen besitzen.

Definiert man daher

$$(4.12)\qquad F(r;\lambda_0,\dots,\lambda_\ell)$$
$$= \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\cdot\Big(M\cdot\sum_{\nu\equiv\ell(2)}\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu}\frac{f}{N}(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}dx \;-\; m\sum_{\nu\equiv\ell-1(2)}\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu}\frac{f}{N}\cdot(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}dx\Big),$$

so gewinnt (4.9) für $(\lambda_0,\dots,\lambda_\ell)\in L$ die Gestalt

$$(4.13)\qquad u(*) \le F(r;\lambda_0,\dots,\lambda_\ell).$$

Bildet man nun formal die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von $F(r;\lambda_0,\dots,\lambda_\ell)$ nach den λ_ν und verlangt, daß dieselben in einem Punkte $(\lambda_0^*,\dots,\lambda_\ell^*)$ verschwinden, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$(4.14)\qquad M\cdot\sum_{\nu\equiv\ell(2)}\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu}x^k(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}dx - m\cdot\sum_{\nu\equiv\ell-1(2)}\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu}x^k(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}dx = 0$$

$$(k=0,\dots,\ell)$$

oder

$$(4.15)\qquad \sum_{\mu=0}^{\ell+1}(-1)^\mu\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}}x^k(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}dx = (-1)^\ell\cdot\frac{M-m}{M+m}\cdot\int_{-1}^{1}x^k(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}dx$$

$$(k=0,\dots,\ell).$$

Auf Grund des Hilfssatzes besitzt dieses System eine Lösung, die (4.11) erfüllt. Das lineare Gleichungssystem

$$(4.16)\qquad (1+r^2-2ra_\mu)^{\frac{n}{2}}\sum_{\nu=0}^{\ell}\lambda_\nu^*\,a_\mu^\nu - (1-r^2) = -g(a_\mu) = 0 \qquad (\mu=1,2,\dots,\ell+1)$$

besitzt daher eine von Null verschiedene Determinante nämlich

$$D = \prod_{\mu=1}^{\ell+1} (1 + r^2 - 2ra_\mu)^{\frac{n}{2}} \cdot \prod_{0<\nu<\mu<\ell+2} (a_\mu - a_\nu),$$

ist also eindeutig nach $(\lambda_0^*, \ldots, \lambda_\ell^*)$ auflösbar. Die mit diesen λ_ν^* gebildete Funktion $g(x)$ besitzt dann die Nullstellen $x = a_\mu$, d.h. es ist

$$(\lambda_0^*, \ldots, \lambda_\ell^*) \in L \quad . \tag{4.17}$$

Deshalb ist (4.13) für $(\lambda_0^*, \ldots, \lambda_\ell^*)$ richtig. Auf Grund von (4.14) fallen dann die Glieder mit den Multiplikatoren λ_ν^* heraus, und es ergibt sich für

$$\varphi(x) = \begin{cases} M & \text{für } x \in (a_{\nu-1}, a_\nu),\ \nu \equiv \ell\,(2) \\ \frac{1}{2}(M-m) & \text{für } x = a_\nu \\ -m & \text{für } x \in (a_{\nu-1}, a_\nu),\ \nu \equiv \ell-1\,(2) \end{cases} \tag{4.18}$$

die Abschätzung

$$u(\mathfrak{x}) \leq \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_{-1}^{1} \varphi(x)\, \frac{(1-r^2)\cdot(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}}{(1+r^2-2rx)^{\frac{n}{2}}}\, dx = M_\ell(r) \,. \tag{4.19}$$

Wir bilden die Potentialfunktion

$$v(\mathfrak{x}_1) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\mathfrak{x}^*|=1} \varphi\left(\frac{\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x}^*}{r}\right) \frac{1-r_1^2}{(1+r_1^2-2\mathfrak{x}_1\cdot\mathfrak{x}^*)^{\frac{n}{2}}}\, d\omega_n \,. \tag{4.20}$$

Dann ist

$$v(\mathfrak{x}) = M_\ell(r) \,. \tag{4.21}$$

Ferner behaupten wir

$$v(\mathfrak{x}_1) \in S_\ell \,. \tag{4.22}$$

Diese beiden Beziehungen besagen:

Die Abschätzung (4.19) ist genau. Die Funktion $v(\mathfrak{x}_1)$ ist eine Extremalfunktion, die die Werte der Schranke annimmt.

Da $v(\mathfrak{x}_1)$ nach dem Maximumprinzip sicher die Bedingung

(1.2) befriedigt, genügt es zum Beweis von (4.22), für $0 \leq k \leq \ell$ und alle Einheitsvektoren δ

$$J_{n,k} = \int_{|\mathfrak{x}^*|=1} \varphi(\mathfrak{x}^* \cdot \frac{\mathfrak{x}}{r}) \cdot (\mathfrak{x}^* \cdot \delta)^k \, d\omega_n = 0 \tag{4.23}$$

zu verifizieren. Dazu schreiben wir δ in der Form

$$\delta = \alpha \cdot \frac{\mathfrak{x}}{r} + \beta \cdot \delta_1 \,, \tag{4.24}$$

wobei δ_1 ein zu $\frac{\mathfrak{x}}{r}$ orthogonaler Einheitsvektor ist. Damit wird

$$J_{n,k} = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \alpha^{k-\nu} \beta^{\nu} \int_{|\mathfrak{x}^*|=1} \varphi(\mathfrak{x}^* \frac{\mathfrak{x}}{r}) (\mathfrak{x}^* \frac{\mathfrak{x}}{r})^{k-\nu} (\mathfrak{x}^* \delta_1)^{\nu} \, d\omega_n \,. \tag{4.25}$$

Hierbei ist für $n = 2$

$$\int_{|\mathfrak{x}^*|=1} \varphi(\mathfrak{x}^* \frac{\mathfrak{x}}{r}) (\mathfrak{x}^* \frac{\mathfrak{x}}{r})^{k-\nu} (\mathfrak{x}^* \delta_1)^{\nu} \, d\omega_n = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\cos\vartheta) (\cos\vartheta)^{k-\nu} (\sin\vartheta)^{\nu} \, d\vartheta$$

$$= (1 + (-1)^{\nu}) \cdot \int_{-1}^{1} \varphi(x) \cdot x^{k-\nu} (1-x^2)^{\frac{\nu}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

und für $n > 2$

$$\int_{|\mathfrak{x}^*|=1} \varphi(\mathfrak{x}^* \cdot \frac{\mathfrak{x}}{r}) \cdot (\mathfrak{x}^* \frac{\mathfrak{x}}{r})^{k-\nu} (\mathfrak{x}^* \delta_1)^{\nu} \, d\omega_n$$

$$= (\omega_{n-2} \int_{0}^{\pi} (\cos\vartheta)^{\nu} (\sin\vartheta)^{n-3} d\vartheta) \int_{-1}^{1} \varphi(x) \, x^{k-\nu} (1-x^2)^{\frac{\nu}{2}} (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} dx.$$

In beiden Fällen verschwindet der erste Faktor für ungerades ν. Für gerades ν $(0 \leq \nu \leq k)$ und $k \leq \ell$ verschwindet der zweite Faktor auf Grund der Definition von $\varphi(x)$.

Damit ist (4.22) bewiesen.

Führt man die vorangehende Überlegung statt für $u(\mathfrak{x})$ für $-u(\mathfrak{x})$ durch, so hat man oben nur M und m zu vertauschen. An die Stelle von $\varphi(x)$ möge dabei die Funktion $\psi(x)$ treten. Dann ergibt sich

$$u(\mathfrak{x}) \geq -\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_{-1}^{1} \psi(x) \frac{(1-r^2)(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}}{(1+r^2-2rx)^{n/2}} \, dx = -m_{\ell}(r), \tag{4.26}$$

wobei die Werte der Schranke wieder von einer Funktion aus S_{ℓ} angenommen werden.

5. Eigenschaften der Extremalfunktionen: Zunächst untersuchen wir die Funktionen $M_\ell(r)$.

Als Maximum einer harmonischen, nicht konstanten Funktion nimmt $M_\ell(r)$ mit wachsendem r streng monoton zu. Für $r=1$ gilt

$$M_\ell(1) = M \,. \tag{5.1}$$

Deuten wir r als komplexe Variable, so ist $M_\ell(r)$ im Einheitskreis $|r|<1$ regulär analytisch. In $r=0$ besitzt die Funktion eine genau $(\ell+1)$-fache Nullstelle; denn anderenfalls würde jede Funktion aus S_ℓ schon zu $S_{\ell+1}$ gehören, was sicherlich nicht zutrifft.

Die Funktion

$$\begin{aligned}\Delta(r) &= M_\ell(r) - M_{\ell+1}(r) \\ &= \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}\varphi^*(x)\cdot\frac{(1-r^2)\cdot(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}}{(1+r^2-2rx)^{\frac{n}{2}}}\,dx\end{aligned} \tag{5.2}$$

ist daher ebenfalls in $|r|<1$ regulär und kann nicht identisch verschwinden. Hierbei ist $\varphi^*(x)$ eine stückweise konstante Funktion mit höchstens $2\ell+1$ Unstetigkeitsstellen, die nur der Werte $M+m$, 0, $-(M+m)$ fähig ist und insbesondere in einem Intervall $(1-\varepsilon,1]$ $(\varepsilon>0)$ verschwindet. Daher ist $\Delta(r)$ auch noch in einer - komplexen - Umgebung von $r=1$ analytisch. $\Delta(r)$ kann daher auf dem reellen Intervall $[0,1]$ nur endlich viele Nullstellen besitzen.

Zieht man noch $S_{\ell+1} \subset S_\ell$ heran, so ergibt sich für alle r $(0 \leq r \leq 1)$

$$M_{\ell+1}(r) \leq M_\ell(r) \,. \tag{5.3}$$

Hierbei kann das Gleichheitszeichen nur bei endlich vielen r gelten, wie dies z.B. in den Randpunkten $r=0$ und $r=1$ der Fall ist.

Genauso sieht man, daß die Funktionen $M_\ell(r)$, ausführlicher $M_\ell(r;M,m)$ geschrieben, in M und m monoton sind:

$$\begin{aligned}&M_\ell(r;M_1,m) \geq M_\ell(r;M_2,m) \quad \text{für} \quad M_1 > M_2 \,, \\ &M_\ell(r;M,m_1) \geq M_\ell(r;M,m_2) \quad \text{für} \quad m_1 > m_2 \,.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Das Gleichheitszeichen kann auch hier höchstens für endlich viele r stehen.

Für die erste Ungleichung ist das wegen

$$M_\ell(1; M_1, m) - M_\ell(1; M_2, m) = M_1 - M_2 > 0$$

trivial. Im zweiten Fall ist für komplexes r

$$\begin{aligned}\Delta^*(r) &= M_\ell(r; M, m_1) - M_\ell(r; M, m_2) \\ &= \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_{-1}^{1} \varphi^{**}(x) \frac{(1-r^2)(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}}{(1+r^2-2rx)^{n/2}}\, dx ,\end{aligned}$$

wobei $\varphi^{**}(x)$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ in $(1-\varepsilon, 1]$ verschwindet, stückweise konstant ist und nur endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzt. $\Delta^*(r)$ ist also auch in $r=1$ analytisch. Würde $\Delta^*(r)$ identisch verschwinden, so könnte die Funktion keinen von Null verschiedenen Taylorkoeffizienten besitzen. Der k-te Koeffizient der Entwicklung von $\Delta^*(r)$ um $r=0$ hat aber die Form

$$\int_{-1}^{1} \varphi^{**}(x)\,(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\, Q_k(x)\, dx .$$

Da $Q_k(x)$ ein Polynom genau k-ten Grades ist, folgt hieraus für alle Polynome $Q(x)$

$$\int_{-1}^{1} \varphi^{**}(x)\,(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\, Q(x)\, dx = 0 .$$

Das ist aber sicher falsch, wie man am Beispiel des Polynoms

$$Q(x) = \prod_{\mu=0}^{m} (x - b_\mu)$$

erkennt. Die b_μ $(-1 = b_0 < b_1 < \ldots < b_{m-1} < b_m = 1)$ seien hier so gewählt, daß $(-1)^\mu \cdot \varphi^{**}(x)$ in $(b_\mu, b_{\mu+1})$ für alle μ entweder nie positiv oder nie negativ wird.

Nach genau dem gleichen Beweisverfahren kann man feststellen, daß die Funktion $\varphi(x)$ durch M, m eindeutig bestimmt ist, also (4.14) nur genau ein Lösungs-$(\ell+1)$-tupel besitzt.

Schließlich läßt sich der Betrag von $M_\ell(r)$ auf jedem

festen Kreise $|r| = r_0 < 1$ der komplexen Ebene durch die von ℓ unabhängige Zahl

$$\frac{(1+r_0^2)\cdot \mathrm{Max}\{M,m\}}{(\mathrm{Min}\{|1+r^2-2rx|\,/\,|r|=r_0,\,-1\leq x\leq 1\})^{n/2}}$$

abschätzen. Nach dem Schwarz'schen Lemma folgt daraus

$$\lim_{\ell\to\infty} M_\ell(r) = 0 \qquad (0\leq r<1), \tag{5.5}$$

wobei der Grenzübergang auf jeder kompakten Teilmenge von $[0,1)$ gleichmäßig erfolgt.

Eine Abschätzung der Funktionen aus S_ℓ ließe sich noch auf folgendem direkteren Wege gewinnen:

Man schätze mit Hilfe von (1.2) in (1.3) die Funktionen α_ν nach oben durch die - notwendig positiven - Zahlen A_ν ab und bilde die Potenzreihe

$$g_\ell(r) = \sum_{k=\ell+1}^{\infty} A_k \cdot r^k , \tag{5.6}$$

die etwa für $|r| < r_0$ konvergiere.

Dann ist sicher

$$u(*) \leq g_\ell(r) \qquad (r=|*|,\ 0\leq r < \mathrm{Min}\{r_0,1\}) \tag{5.7}$$

für alle $u(*) \in S_\ell$ richtig. Doch ist diese Abschätzung für kein $r \neq 0$ genau.

Beweis: Die A_k müssen speziell die Koeffizienten der Potenzreihenentwickelung von $M_\ell(r)$ um $r=0$ sämtlich übertreffen, so daß die mindestens für $|r| < \mathrm{Min}\{r_0,1\}$ konvergente Potenzreihenentwicklung von

$$g_\ell(r) - M_\ell(r)$$

keine negativen Koeffizienten besitzen kann. Ist nur ein Koeffizient positiv, so ist bereits alles bewiesen. Wir haben daher nur den Fall

$$g_\ell(r) \equiv M_\ell(r) \tag{5.8}$$

auszuschließen.

Dazu betrachten wir die Potentialfunktionen

$$u_k(x) = C \cdot r^k \cdot P_k\left(\frac{x \cdot \xi}{r}\right) . \tag{5.9}$$

Hierbei ist ξ ein fester Einheitsvektor und $P_k(x)$ n-dimensionale zonale Kugelfunktion k-ter Ordnung, also Polynomlösung der Differentialgleichung

$$(1-x^2)\,y'' - (n-1)\,x\,y' + k(k+n-2)\,y = 0.$$

$P_k(x)$ ist dann ein Polynom k-ten Grades, das der Gleichung

$$P_k(-x) = (-1)^k \cdot P_k(x) \tag{5.10}$$

genügt. Als Normierung sei

$$P_k(1) = 1$$

vorgeschrieben.

Wir betrachten jetzt nur ungerades k. Dann folgt aus (5.10)

$$\text{Max}\{P_k(\cos\vartheta) \mid 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\} = -\text{Min}\{P_k(\cos\vartheta) \mid 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\} . \tag{5.11}$$

Der Faktor C in (5.9) wird nun so gewählt, daß

$$\text{Max}\{u_k(x) \mid |x| = 1\} = \text{Min}\{M, m\}$$

gilt. Wegen (5.11) ist dann

$$u_k(x) \in S_\ell$$

für alle ungeraden $k \geq \ell+1$. D.h. aber

$$A_k \geq \text{Min}\{M, m\} \qquad (k > \ell,\ k \equiv 1(2)).$$

Hieraus folgt

$$g_\ell(r) \geq r^{\ell+2} \cdot \frac{\operatorname{Min}\{M,m\}}{1-r^2} \,. \tag{5.12}$$

Da $M_\ell(r)$ für $r \to 1$ beschränkt bleibt, ist diese Ungleichung nicht mit (5.8) verträglich.

Der entsprechende Tatbestand gilt für die Funktionen $m_\ell(r)$.

Über die Struktur der Funktionen $\varphi(x)$ lassen sich folgende Aussagen machen:
Ist $\ell = 2\lambda - 1$, so sind durch

$$a_{\ell+2-\nu} = -a_\nu \qquad (\nu = 1,2,\ldots,\lambda) \tag{5.13}$$

alle Gleichungen von (4.15) mit $k \equiv 1(2)$ erfüllt. Es bleibt noch für

$$b_0 = 0\,,\ b_\nu = a^2_{\lambda+\nu}\ (\nu = 1,2,\ldots,\lambda+1)\,,\quad x^2 = t \tag{5.14}$$

das System

$$\sum_{\mu=0}^{\lambda} (-1)^\mu \cdot \int_{b_\mu}^{b_{\mu+1}} (1-t)^{\frac{n-3}{2}} \cdot t^{-\frac{1}{2}} t^s \, dt$$
$$= (-1)^{\lambda+1} \frac{M-m}{M+m} \int_0^1 (1-t)^{\frac{n-3}{2}} t^{-\frac{1}{2}} t^s \, dt \qquad (s = 0,1,\ldots,\lambda-1) \tag{5.15}$$

zu lösen. Das ist auf Grund des Hilfssatzes möglich. Es ist daher stets

$$\varphi(-x) = \varphi(x) \qquad (\ell \equiv 1(2)) \tag{5.16}$$

erreichbar, was

$$v(-\varkappa_1) = v(\varkappa_1) \qquad (\ell \equiv 1(2)) \tag{5.17}$$

nach sich zieht.

Ist $\ell = 2(\lambda-1)$ und $M = m$ so kann man eine Lösung von (4.15) wieder in der Gestalt (5.13) ansetzen. Das hat hier

$$a_\lambda = 0$$

zur Folge. Für $\lambda = 1$ ist damit das System schon aufgelöst. Für $\lambda > 1$ sind alle Gleichungen von (4.15) mit geradem k durch diesen Ansatz erfüllt. Mit den Bezeichnungen (5.14) bleibt das folgende Gleichungssystem übrig

$$(5.18)\qquad \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} (-1)^{\mu} \int_{b_\mu}^{b_{\mu+1}} (1-t)^{\frac{n-3}{2}} \cdot t^{s}\, dt = 0 \qquad (s = 0,1,\ldots,\lambda-2).$$

Die Lösbarkeit dieses Systems wird durch den Hilfssatz gesichert.

Es gilt also immer

$$(5.19)\qquad \varphi(-x) = -\varphi(x) \qquad (\ell \equiv 0(2),\ M = m).$$

Hieraus folgt

$$(5.20)\qquad v(-x_1) = -v(x_1) \qquad (\ell \equiv 0(2),\ M = m).$$

Eine analoge Betrachtung zeigt, daß die Funktionen $\psi(x)$ ebenfalls den Relationen (5.16) und (5.19) genügen. Die mit Hilfe von $\psi(x)$ gebildeten Extremalfunktionen für die Abschätzung nach unten erfüllen also (5.17) und (5.20).

Für geradzahliges ℓ substituieren wir nun in (4.15) $x = -t$ und erhalten

$$(5.21)\qquad \sum_{\mu=0}^{\ell+1} (-1)^{\ell+1-\mu} \int_{-a_{\mu+1}}^{-a_\mu} (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} t^k\, dt = (-1)^{\ell} \frac{m-M}{m+M} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} t^k\, dt \qquad (k = 0,\ldots,\ell),$$

d.h. $(-a_{\ell+1}, -a_\ell, \ldots, -a_2, -a_1)$ ist Lösung des Systems (4.15), wenn man M und m vertauscht. Das heißt aber nichts anderes als

$$(5.22)\qquad \psi(x) = -\varphi(-x) \qquad (\ell \equiv 0(2)).$$

Es sei jetzt $n = 2$ und ℓ ungerade, etwa $\ell = 2^{\lambda} u - 1$ $(\lambda \geq 1;\ u \equiv 1(2))$. Setzt man dann

$$(5.23)\qquad \varphi_1(\vartheta) = \varphi(\cos\vartheta), \quad \psi_1(\vartheta) = \psi(\cos\vartheta)$$

und speziell für $\lambda = 1$

(5.24) $$\varphi_1(\vartheta) = \varphi_1^*(\vartheta) , \quad \psi_1(\vartheta) = \psi_1^*(\vartheta) ,$$

so gelten die Funktionalgleichungen

(5.25) $$\varphi_1\left(\frac{\vartheta}{2^{\lambda-1}}\right) = \varphi_1^*(\vartheta) , \quad \psi_1\left(\frac{\vartheta}{2^{\lambda-1}}\right) = \psi_1^*(\vartheta)$$

und

(5.26) $$\psi_1(\vartheta) = -\varphi_1\left(\vartheta + \frac{\pi}{2^\lambda}\right) .$$

Zum Beweis setzen wir für $\lambda > 1$ die Lösung von (4.15) wieder in der Form

$$a_{2^\lambda u - \nu} = - a_\nu$$

an. Damit sind alle Gleichungen des Systems mit ungeraden Exponenten erfüllt. Das verbleibende Gleichungssystem ist, wie die Substitution

$$t = 2x^2 - 1$$

zeigt, für

(5.27) $$b_0 = -1 , \quad b_\nu = 2 a^2_{2^{\lambda-1}u+\nu} - 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2^{\lambda-1}u)$$

mit

(5.28) $$\sum_{\nu=0}^{2^{\lambda-1}u} (-1)^\nu \int_{b_\nu}^{b_{\nu+1}} (t+1)^s \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{M-m}{M+m} \int_{-1}^{1} (t+1)^s \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$(s = 0, 1, \ldots, 2^{\lambda-1}u - 1)$$

äquivalent. (5.28) ist aber mit (4.15) für $\ell = 2^{\lambda-1}u - 1$ gleichwertig. Hieraus folgt induktiv die Beziehung (5.25), da sich, wenn man

$$a_{2^{\lambda-1}u+\nu} = \cos \alpha_{2^{\lambda-1}u+\nu}$$

definiert, aus (5.27) sofort

$$b_\nu = \cos 2\alpha_{2^{\lambda-1}u+\nu}$$

ergibt. Auf Grund von (5.25) genügt es, (5.26) für $\varphi_1^*(\vartheta)$ und $\psi_1^*(\vartheta)$ zu beweisen. Das ist aber trivial, da die Substitution

$$y = 1 - t$$

das System (5.15) auf die Form

$$(5.29)\quad \sum_{\nu=0}^{u} (-1)^{u-\nu} \int_{1-b_{\nu+1}}^{1-b_\nu} (1-y)^s \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} = \frac{m-M}{m+M} \int_0^1 (1-y)^s \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} \qquad (s = 0,1,\dots,u-1)$$

bringt. Also ist $(1-b_u, 1-b_{u-1}, \dots, 1-b_2, 1-b_1)$ Lösung von (5.15), wenn man M und m vertauscht. Das hat aber gemäß der Definition (5.14) der b_ν gerade (5.26) zur Folge.

Mit Hilfe der Identitäten (5.22) und (5.26) zeigen wir jetzt, daß sich für gerades ℓ und für $n \geq 2$ ein Einheitsvektor δ finden läßt, derart daß

$$(5.30)\quad v(\delta \cdot r) = - m_\ell(r)$$

gilt; d.h. die Extremalfunktion für die Abschätzung nach oben ist in den genannten Fällen auch Extremalfunktion für die Abschätzung nach unten.

Entwickelt man eine Funktion der Form

$$(5.31)\quad u(x_1) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|x^*|=1} h\left(\frac{x \cdot x^*}{r}\right) \cdot \frac{1 - r_1^2}{(1 + r_1^2 - 2x_1 \cdot x^*)^{n/2}}\, d\omega_n$$

auf der Geraden

$$\varrho = \lambda \delta$$

um den Nullpunkt in eine Taylorreihe, so hängen die Entwicklungskoeffizienten einzig und allein von den Integralen

$$(5.32)\quad J_{n,k}(\delta, h) = \int_{|x^*|=1} h\left(\frac{x \cdot x^*}{r}\right) (x^* \delta)^k\, d\omega_n$$

ab.

Um (5.30) zu verifizieren, brauchen wir daher nur

(5.33) $$J_{n,k}(\delta,\varphi) = J_{n,k}(\tfrac{1}{r},-\psi)$$

herzuleiten.

Für geradzahliges ℓ wählen wir $\delta = -\frac{1}{r}$. Dann liefert (5.22)

$$\begin{aligned} J_{n,k}(\delta,\varphi) &= \omega_{n-1}\int_{-1}^{1}\varphi(-x)\cdot x^k(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx \\ &= \omega_{n-1}\int_{-1}^{1}-\psi(x)\,x^k(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx \\ &= J_{n,k}(\tfrac{1}{r},-\psi). \end{aligned}$$

Ist $\ell = 2^\lambda u - 1$ und $n = 2$, so leistet der Vektor $\delta = (\cos\frac{\pi}{2^\lambda}, \sin\frac{\pi}{2^\lambda})$ alles:

$$\begin{aligned} J_{2,k}(\delta,\varphi) &= \int_0^{2\pi}\varphi_1(\vartheta)\cdot\cos^k(\vartheta-\tfrac{\pi}{2^\lambda})\,d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi}\varphi_1(\vartheta+\tfrac{\pi}{2^\lambda})\cos^k\vartheta\,d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi}-\psi_1(\vartheta)\cdot\cos^k\vartheta\,d\vartheta = J_{2,k}(\tfrac{1}{r},-\psi). \end{aligned}$$

Damit ist (5.30) bewiesen.

Fassen wir die wichtigsten bisherigen Ergebnisse zusammen, ergibt sich:

Satz: Für jede Funktion der Klasse S_ℓ gelten die Ungleichungen (4.19) und (4.26). Die Klasse enthält für jede Abschätzung eine Funktion, die die Werte der Schranke annimmt. Ist ℓ gerade oder $n = 2$, so leistet dies schon eine einzige Funktion für (4.19) und (4.26).

Die Schranken $M_\ell(r)$, $m_\ell(r)$ genügen den Relationen (5.1), (5.3), (5.4) und (5.5). Die zu ihrer Definition benutzten, eindeutig bestimmten Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sind für gerades ℓ und $M = m$ ungerade und für ungerades ℓ gerade.

6. Der Fall einseitig unbeschränkter Funktionen: Wir gehen von dem Gleichungssystem (4.14) aus und lassen eine der beiden Größen M, m gegen unendlich konvergieren. Die andere Größe bleibt fest. Das ergibt:

(6.1) $$\lim_{M\to\infty}(a_{\ell+2-2\nu} - a_{\ell+1-2\nu}) = 0 \qquad (0 \le \nu \le \tfrac{\ell+1}{2}),$$

$$(6.2)\qquad \lim_{M\to\infty} M\cdot\sum_{\nu\le \ell(2)} \int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} x^j(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx = m\int_{-1}^{1} x^j(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx$$

$$(j = 0,1,\dots,\ell)$$

bzw.

$$(6.3)\qquad \lim_{m\to\infty} (a_{\ell+1-2\nu} - a_{\ell-2\nu}) = 0 \qquad \left(0 \le \nu \le \frac{\ell}{2}\right),$$

$$(6.4)\qquad \lim_{m\to\infty} m\cdot\sum_{\nu\le \ell+1(2)} \int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} x^j(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx = M\cdot\int_{-1}^{1} x^j(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx$$

$$(j = 0,1,\dots,\ell).$$

Da die a_ν sämtlich im Intervall $(-1,1)$ liegen, gibt es eine Folge (m_k, M_k), für die je nach dem behandelten Fall

$$m_k = m\ , \qquad \lim_{k\to\infty} M_k = +\infty$$

oder

$$\lim_{k\to\infty} m_k = +\infty\ , \qquad M_k = M$$

gilt, derart daß

$$(6.5)\qquad \lim_{k\to\infty} (a_{1,k},\dots,a_{\ell+1,k}) = (c_1,\dots,c_{\ell+1})$$

existiert, wenn $(a_{1,k},\dots,a_{\ell+1,k})$ die bzgl. $m = m_k$, $M = M_k$ gebildete Lösung von (4.14) ist.
Da die Lösung von (4.14) nur von dem Quotienten $m:M$ abhängt, ist $(c_1,\dots,c_{\ell+1})$ von der beim Grenzübergang festgehaltenen Größe unabhängig.

Es sei

$$(6.6)\qquad G = \{(a_1,\dots,a_{\ell+1}) \mid -1 \le a_1 < a_2 < \dots < a_\ell < a_{\ell+1} \le 1\}.$$

Dann ist das lineare Gleichungssystem (4.16) auf G eindeutig nach $(\lambda_0^*,\dots,\lambda_\ell^*)$ auflösbar. Diese Lösung ist auf G stetig, für komplexes r in $|r|<1$ regulär analytisch und

für reelles r $(0 \leq r < 1)$ reell. $(\lambda_0^*, \ldots, \lambda_\ell^*)$ läßt sich ferner stetig auf G^- fortsetzen, wobei das Verhalten bzgl. r erhalten bleibt.

Beweis: Es sei $P = (a_1, \ldots, a_{k-1}, c, \ldots, c, a_{k+m+1}, \ldots, a_{\ell+1})$ mit $a_{k-1} < c < a_{k+m-1}$ ein beliebiger Randpunkt von G. Wir stellen λ_ν^* auf G als Determinantenquotienten dar mit der unter (4.16) definierten Größe D als Nenner, subtrahieren in der Determinante im Zähler die k-te Zeile von der ν-ten $(k < \nu < k+1+m)$ und ziehen aus letzterer den Faktor $(a_\nu - a_k)$ heraus. Dann wird die so entstandene $(k+1)$-te Zeile von den folgenden $(m-1)$ abgezogen und jeweils $(a_\mu - a_{k+1})$ ausgeklammert u. s. f. Wendet man dieses Verfahren für alle in den Koordinaten von P mehrfach auftretenden Größen c an, so läßt sich nach der Reduktion des Bruches der Grenzübergang in Zähler und Nenner getrennt durchführen. Da sich dabei stets reguläre Funktionen in r $(|r| < 1)$ ergeben, beweist das die Behauptung.

Verstehen wir unter $(\lambda_{0,k}, \ldots, \lambda_{\ell,k})$ die für $(a_{1,k}, \ldots, a_{\ell+1,k})$ gebildete Lösung von (4.16), so folgt hieraus, daß

$$\lim_{k \to \infty} (\lambda_{0,k}, \ldots, \lambda_{\ell,k}) = (\mu_0, \ldots, \mu_\ell) \tag{6.7}$$

existiert. Die μ_ν sind für komplexes r in $|r| < 1$ analytisch und für reelles r $(0 \leq r < 1)$ reell.

Wir betrachten jetzt für festes positives $r < 1$ die in (4.5) definierte Funktion

$$f(1, x\,;\, \lambda_0, \ldots, \lambda_\ell).$$

Diese ist in $(\lambda_0, \ldots, \lambda_\ell)$ gleichmäßig stetig und für komplexes x in $|x| < \frac{2r}{1+r^2}$ regulär.

Bildet man daher $f(1, x; \mu_0, \ldots, \mu_\ell)$, so hat diese Funktion nach dem Satz über das logarithmische Residuum die Nullstellen

$$c_1, c_2, \ldots, c_{\ell+1},$$

jede so oft gezählt, wie sie unter diesen Zahlen vorkommt.

Beschränken wir uns nun wieder auf reelle x, so zeigen die Ausführungen des 4. Abschnittes, daß $f(1, x; \mu_0, \ldots, \mu_\ell)$

im Intervall

$$-\frac{2r}{1+r^2} \leq x \leq \frac{2r}{1+r^2}$$

keine weiteren Nullstellen besitzt. Nach (6.1) und (6.2) hat die Funktion daher in $(-1,1)$ nur Nullstellen gerader Ordnung.

Die in (4.9) angegebene Schranke hat also für $(\lambda_0,\dots,\lambda_\ell) = (\mu_0,\dots,\mu_\ell)$ die Gestalt

$$(6.8)\quad M_\ell(r) = m\cdot\Big[\sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\equiv 0(2)}}^{\ell} \mu_\nu(r)\cdot\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1} x^\nu\cdot(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx - 1\Big]$$

$(m_k = m)$,

bzw.

$$(6.9)\quad M_\ell(r) = M\cdot\Big[1 - \sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\equiv 0(2)}}^{\ell} \mu_\nu(r)\cdot\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1} x^\nu\cdot(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx\Big] \qquad (M_k = M).$$

Wir zeigen jetzt, daß $M_\ell(r)$ eine obere Schranke für alle Funktionen aus S_ℓ ist, und zwar für $M=\infty$ in der Form (6.8) und für $m=\infty$ in der Form (6.9).

$u(\mathfrak{z}_1)$ sei eine beliebige Funktion aus S_ℓ und $\mathfrak{z}$ ein beliebiger fester Punkt mit $|\mathfrak{z}| = r < 1$. (R_ν) sei eine Folge mit

$$(6.10)\qquad r < R_\nu < 1\,, \qquad \lim_{\nu\to\infty} R_\nu = 1\,.$$

Dann ist $u(\mathfrak{z}_1)$ auf $|\mathfrak{z}_1| = R_\nu$ beschränkt, außerdem gilt dort

$$-\lim_{k\to\infty} m_k \;<\; u(\mathfrak{z}_1) \;<\; \lim_{k\to\infty} M_k\,.$$

Wir können also die Abschätzung (4.9) anwenden:

$$(6.11)\qquad u(\mathfrak{z}) = u\Big(\frac{\mathfrak{z}}{R_\nu}\cdot R_\nu\Big) \leq M_\ell\Big(\frac{r}{R_\nu}\Big)\,.$$

Da diese Abschätzung für jedes ν gilt und $M_\ell(r)$ stetige Funktion von r ist, ergibt sich für alle $u(\mathfrak{z}) \in S_\ell$

(6.12) $$u(\varphi) \leq M_\ell(r) \ .$$

Bei der Herleitung von (6.12) haben wir von der Eigenschaft (6.5) der Zahlen $(c_1, \dots, c_{\ell+1})$ keinen Gebrauch gemacht, sondern nur die Tatsache benutzt, daß $f(1, x; \mu_0, \dots, \mu_\ell)$ in $(-1, 1)$ immer das gleiche, passende Vorzeichen besaß.

Unter Berücksichtigung von (6.5) beweisen wir jetzt, daß die Abschätzung (6.12) scharf ist.

Es sei $M_{\ell,k}(r)$ die im Sinne von (4.19) für $m = m_k$, $M = M_k$ bestimmte Funktion. Dann ist

(6.13) $$\lim_{k\to\infty} M_{\ell,k}(r) = M_\ell(r) \qquad (0 \leq r < 1) \ .$$

Dieser Grenzübergang erfolgt auf jeder kompakten Teilmenge von $[0, 1)$ gleichmäßig.

Das besagt aber gerade, daß die angegebene Schranke genau ist, da die Werte von $M_{\ell,k}(r)$ für jedes k von einer Funktion aus S_ℓ angenommen werden.

Beim Beweis beschränken wir uns auf $M = \infty$. Den Fall $m = \infty$ kann man entsprechend erledigen.

Nach (6.12) gilt:

(6.14) $$0 \leq \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} \cdot \left[M_\ell(r) - M_{\ell,k}(r)\right] =$$

$$= m \cdot \sum_{\nu=0}^{\ell} (\mu_\nu - \lambda_{\nu,k}) \cdot \int_{-1}^{1} x^\nu \cdot (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} dx + (m + M_k) \sum_{\mu \in \ell(2)} J_{\mu,k}$$

mit

(6.15) $$J_{\mu,k} = -\int_{a_{\mu-1,k}}^{a_{\mu,k}} \left[\frac{1-r^2}{(1+r^2-2rx)^{\frac{n}{2}}} - \sum_{\nu=0}^{\ell} \lambda_{\nu,k} x^\nu\right] (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} dx \ .$$

Auf Grund von (4.16) und (6.1) kann man den ersten Faktor des Integranden von $J_{\mu,k}$ $(\mu \in \ell(2))$ unabhängig von r für $0 \leq r \leq r_0 < 1$ durch Wahl von k kleiner als ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ machen. Wegen (6.5) ist auch $m \sum_{\nu=0}^{\ell} (\mu_\nu - \lambda_{\nu,k}) \cdot \int_{-1}^{1} x^\nu (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} dx$ von einem k an kleiner als ε . Also gilt:

(6.16) $$0 \leq \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} \left[M_\ell(r) - M_{\ell,k}(r)\right]$$

$$< \varepsilon \cdot \left[1 + (m + M_k) \cdot \sum_{\nu \in \ell(2)} \int_{a_{\nu-1,k}}^{a_{\nu,k}} (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} dx\right] .$$

Da der Faktor von ε nicht von r abhängt und wegen (6.2) beschränkt bleibt, ist damit (6.13) bewiesen.

Abschließend zeigen wir wie im endlichen Fall die Existenz einer Extremalfunktion $v(\mathfrak{x}_1) \in S_l$ mit der Eigenschaft

$$v(\mathfrak{x}) = M_l(r) \,. \qquad (6.17)$$ [1)]

Durch eventuelle Auswahl einer Teilfolge von (m_k, M_k) läßt sich immer erreichen, daß in (6.2) bzw. (6.4) jeder einzelne Summand der dort stehenden Summen für $j = 0$ bereits konvergiert. Wenn o. B. d. A. (m_k, M_k) selbst schon diese Teilfolge ist, sei etwa für $m = m_k$, $\lim_{k\to\infty} M_k = +\infty$

$$\lim_{k\to\infty} M_k \int_{a_{\nu-1,k}}^{a_{\nu,k}} (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx = A_\nu \cdot m \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx \qquad (6.18)$$

$$(\nu = l(2)),$$

bzw. für $\lim_{k\to\infty} m_k = +\infty$, $M = M_k$

$$\lim_{k\to\infty} m_k \int_{a_{\nu-1,k}}^{a_{\nu,k}} (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx = A_\nu M \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx \qquad (\nu = l-1(2)). \qquad (6.19)$$

Schreibt man nun ausführlich

$$\mathfrak{x}^* = (\xi_1, \dots, \xi_n)\,, \qquad \mathfrak{x}_1 = (x_1, \dots, x_n)\,, \qquad |\mathfrak{x}_1| = r_1\,,$$

wobei x_1, ξ_1 die Komponenten dieser Vektoren in der Richtung von $\mathfrak{x}$ sind, so behaupten wir:

Für $M = \infty$ ist

$$v(\mathfrak{x}_1) = m\left[-1 + \sum_{\nu=l(2)} \frac{A_\nu}{\omega_{n-1}} \int_{c_\nu^2 + \sum_{\varrho=2}^{n} \xi_\varrho^2 = 1} \frac{(1-r_1^2)\cdot d\omega_{n-1}}{((c_\nu - x_1)^2 + \sum_{\varrho=2}^{n} (\xi_\varrho - x_\varrho)^2)^{n/2}}\right] \qquad (n>2), \qquad (6.20)$$

$$v(\mathfrak{x}_1) = m\left[-1 + \sum_{\nu=l(2)} \frac{A_\nu}{2} \sum_{\varrho=0}^{1} \frac{1-r_1^2}{(c_\nu - x_1)^2 + ((-1)^\varrho |\sqrt{1-c_\nu^2}| - x_2)^2}\right] \qquad (n=2)$$

und für $m = \infty$

$$v(\mathfrak{x}_1) = M\left[1 - \sum_{\nu=l-1(2)} \frac{A_\nu}{\omega_{n-1}} \int_{c_\nu^2 + \sum_{\varrho=2}^{n} \xi_\varrho^2 = 1} \frac{(1-r_1^2)\cdot d\omega_{n-1}}{((c_\nu - x_1)^2 + \sum_{\varrho=2}^{n} (\xi_\varrho - x_\varrho)^2)^{n/2}}\right] \qquad (n>2), \qquad (6.21)$$

$$v(\mathfrak{x}_1) = M\left[1 - \sum_{\nu=l-1(2)} \frac{A_\nu}{2} \sum_{\varrho=0}^{1} \frac{1-r_1^2}{(c_\nu - x_1)^2 + ((-1)^\varrho |\sqrt{1-c_\nu^2}| - x_2)^2}\right] \qquad (n=2)$$

---

1) Die folgende Konstruktion der Extremalfunktion wurde dieser Arbeit erst nachträglich zugefügt.

Extremalfunktion von S_ℓ.

Zum Beweis betrachten wir die im Sinne von (4.20) bzgl. $m = m_k$, $M = M_k$ konstruierten Extremalfunktionen, die wir mit $v_k(w_A)$ bezeichnen wollen, und zeigen

$$\lim_{k\to\infty} v_k(w_A) = v(w_A). \tag{6.22}$$

Der Grenzübergang erfolgt gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $|w_A| < 1$.

Wegen $v_k(w) = M_{\ell,k}(r)$ und (6.13) ist mit (6.22) die Behauptung nachgewiesen.

Da die anderen Fälle ganz analog behandelt werden können, begnügen wir uns damit, (6.22) für $M = \infty$ und $n > 2$ zu überprüfen: Dann hat $v_k(w_A)$ die Form:

$$v_k(w_A) = \frac{1}{\omega_n}\Big[-m\sum_{\nu\in\ell(2)}\int\limits_{\substack{|w^*|=1\\ a_{\nu-1,k}\le\xi_A<a_{\nu,k}}}\frac{(1-r_A^2)\,d\omega_n}{\big(\sum_{\varrho=1}^{n}(\xi_\varrho-x_\varrho)^2\big)^{n/2}} + M_k\sum_{\nu\in\ell(2)}\int\limits_{\substack{|w^*|=1\\ a_{\nu-1,k}\le\xi_A<a_{\nu,k}}}\frac{(1-r_A^2)\,d\omega_n}{\big(\sum_{\varrho=1}^{n}(\xi_\varrho-x_\varrho)^2\big)^{n/2}}\Big] \tag{6.23}$$

$$= -m + \frac{1}{\omega_n}\sum_{\nu\in\ell(2)}(M_k+m)\int\limits_{\substack{|w^*|=1\\ a_{\nu-1,k}\le\xi_A<a_{\nu,k}}}\frac{(1-r_A^2)\cdot(1-\xi_A^2)^{\frac{n-3}{2}}d\xi_A\cdot d\omega_{n-1}}{\big(\sum_{\varrho=1}^{n}(\xi_\varrho-x_\varrho)^2\big)^{n/2}}.$$

Also gilt:

$$\omega_n\,|v(w_A)-v_k(w_A)|$$

$$\le m\sum_{\nu\in\ell(2)}\int\limits_{\substack{|w^*|=1\\ a_{\nu-1,k}\le\xi_A<a_{\nu,k}}}\frac{(1-r_A^2)\cdot(1-\xi_A^2)^{\frac{n-3}{2}}d\xi_A\,d\omega_{n-1}}{\big(\sum_{\varrho=1}^{n}(\xi_\varrho-x_\varrho)^2\big)^{n/2}} + \sum_{\nu\in\ell(2)}\int\limits_{\substack{|w^*|=1\\ a_{\nu-1,k}\le\xi_A<a_{\nu,k}}}\Big|\frac{1-r_A^2}{\big((c_\nu-x_A)^2+\sum_{\varrho=2}^{n}(\xi_\varrho-x_\varrho)^2\big)^{\frac{n}{2}}}-\frac{1-r_A^2}{\big(\sum_{\varrho=1}^{n}(\xi_\varrho-x_\varrho)^2\big)^{\frac{n}{2}}}\Big|M_k(1-\xi_A^2)^{\frac{n-3}{2}}d\xi_A\,d\omega_{n-1}$$

$$+\sum_{\nu\in\ell(2)}\int\limits_{c_\nu^2+\sum_{\varrho=2}^{n}\xi_\varrho^2=1}|A_\nu|\,m\cdot\int_{-1}^{1}(1-\xi_A^2)^{\frac{n-3}{2}}d\xi_A - M_k\cdot\int_{a_{\nu-1,k}}^{a_{\nu,k}}(1-\xi_A^2)^{\frac{n-3}{2}}d\xi_A\Big|\frac{(1-r_A^2)\,d\omega_{n-1}}{\big((c_\nu-x_A)^2+\sum_{\varrho=2}^{n}(\xi_\varrho-x_\varrho)^2\big)^{n/2}}.$$

Auf Grund von (6.1) und (6.18) können die Beträge in den Integranden, sowie die erste Summe auf jeder Kugel $|w_A|\le q<1$ allein durch Wahl von k kleiner als ein vorgegebenes $\varepsilon>0$ gemacht werden:

$$\omega_n\,|v(w_A)-v_k(w_A)|$$

$$\le \varepsilon\Big[1+\sum_{\nu\in\ell(2)}\int\limits_{c_\nu^2+\sum_{\varrho=2}^{n}\xi_\varrho^2=1}\frac{(1-r_A^2)\,d\omega_{n-1}}{\big((c_\nu-x_A)^2+\sum_{\varrho=2}^{n}(\xi_\varrho-x_\varrho)^2\big)^{n/2}}+\omega_{n-1}\sum_{\nu\in\ell(2)}M_k\int_{a_{\nu-1,k}}^{a_{\nu,k}}(1-\xi_A^2)^{\frac{n-3}{2}}d\xi_A\Big].$$

Der Faktor von ε ist nach (6.2) beschränkt, und zwar gleichmäßig in k.

Ganz analog lassen sich die Elemente von S_ℓ durch eine Funktion $-m_\ell(r)$ nach unten abschätzen:

$$u(\vartheta) \geq -m_\ell(r), \tag{6.24}$$

wobei für eine Funktion aus S_ℓ hier Gleichheit besteht.

Mit Hilfe der Relation (6.22) lassen sich die allgemeinen Eigenschaften der Extremalfunktionen vom endlichen auf den unendlichen Fall übertragen. Daher ist für ungerade Zahlen ℓ

$$v(-\vartheta_1) = v(\vartheta_1). \tag{6.25}$$

Für geradzahliges ℓ oder für $n=2$ ist die in (6.20) bzw. (6.21) definierte Extremalfunktion für die Abschätzung nach oben auch Extremalfunktion für die Ungleichung (6.24).

Betrachten wir jetzt die Schranken $M_\ell(r)$, so folgt aus der Definition (6.8) bzw. (6.9) zunächst, daß diese Funktionen für komplexe r in $|r|<1$ regulär sind.

Es sei $\varphi_{\ell,k}(x)$ die im Sinne der Definition (4.18) für $m = m_k$, $M = M_k$ gebildete Funktion. Dann gibt es nach (6.2) bzw. (6.4) eine von k und ℓ unabhängige Zahl C, so daß

$$\int_{-1}^{1} |\varphi_{\ell,k}(x)| (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} dx < C \tag{6.26}$$

gilt.

Diese Ungleichung hat zur Folge, daß die Funktionen

$$M_{\ell,k}(r) = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_{-1}^{1} \varphi_{\ell,k}(x) \cdot \frac{1-r^2}{(1+r^2-2rx)^{n/2}} (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} dx$$

auf dem Kreise $|r| = r_0 < 1$ der komplexen Ebene eine von k und ℓ unabhängige Schranke für ihren Betrag besitzen.

Nach dem Satze von Vitali gilt daher die Beziehung (6.13) auch für komplexes r mit $|r|<1$, gleichmäßig für $|r| \leq r_0 < 1$. Außerdem ist $|M_{\ell,k}(r)|$ auf $|r| = r_0$ durch eine von ℓ unabhängige Größe beschränkt. Da $M_\ell(r)$ in $r=0$ eine genau $(\ell+1)$-fache Nullstelle besitzt, folgt hieraus

nach dem Schwarz'schen Lemma

$$\lim_{\ell \to \infty} M_\ell(r) = 0 \qquad (0 \leq r < 1). \tag{6.27}$$

Auf jeder kompakten Teilmenge von $[0,1)$ erfolgt der Grenzübergang gleichmäßig.

Die Funktion $M_\ell(r) - M_{\ell+1}(r)$ ist im komplexen Einheitskreis regulär und besitzt in $r = 0$ eine genau $(\ell+1)$-fache Nullstelle, verschwindet also nicht identisch. Unter Berücksichtigung von $S_{\ell+1} \subset S_\ell$ hat das die Ungleichung

$$M_{\ell+1}(r) \leq M_\ell(r) \qquad (0 \leq r < 1) \tag{6.28}$$

zur Folge. Die Stellen, an denen hier Gleichheit besteht, können sich in $[0,1)$ nicht häufen.

Wegen (6.13) und der entsprechenden Aussage über die $M_{k,\ell}(r)$ ist $M_\ell(r)$ eine monotone Funktion der reellen Veränderlichen r $(0 \leq r < 1)$. Infolge der Regularität liegt sogar strenge Monotonie vor:

$$M_\ell(r) < M_\ell(r') \qquad (0 \leq r < r' < 1). \tag{6.29}$$

Für $r \to 1$ konvergiert $M_\ell(r)$ gegen M $(M \leq \infty)$.

Als Funktion von m bzw. M $(m < \infty$ bzw. $M < \infty)$ ist $M_\ell(r)$ für jedes positive r ebenfalls streng monoton. Das ergibt sich aus (6.8) bzw. (6.9), da $(c_1, \ldots, c_{\ell+1})$ nicht von dieser Größe abhängt.

Die hier angeführten Eigenschaften von $M_\ell(r)$ gelten natürlich auch für $m_\ell(r)$.

Zusammengefaßt ergibt sich:

Satz: Für alle Funktionen aus S_ℓ ist

$$-m_\ell(r) \leq u(\mathfrak{k}) \leq M_\ell(r).$$

Die Klasse enthält für jede Abschätzung ein Element $v(\mathfrak{k}_1)$, das die Werte der Schranke annimmt. Für gerades ℓ oder $n = 2$ nimmt $v(\mathfrak{k}_1)$ die Werte beider Schranken an.

Ferner werden u.a. die Relationen (6.27), (6.28) und (6.29) von $m_\ell(r)$ und $M_\ell(r)$ erfüllt.

§ III
Spezialfälle.

7. Numerische Behandlung von Spezialfällen: Für $n=2$ können wir sämtliche Extremalfunktionen und Schranken explizit angeben.

Zunächst seien M, m endlich. Dann definieren wir ausgehend von dem durch

$$w_\ell(0) = 0$$

festgelegten Funktionselement die Funktion

$$(7.1) \qquad w_\ell(z) = \frac{2}{\pi}(M+m)\,\operatorname{arctg}\frac{2z^{\ell+1}\operatorname{tg}\alpha}{1+z^{\ell+1}+(1-z^{\ell+1})\operatorname{tg}^2\alpha}$$

mit

$$(7.2) \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{M}{M+m}\,, \qquad \ell = 0,1,2,\ldots\,.$$

$w_\ell(z)$ ist für alle z regulär, für die das Argument des Arcustangens von $\pm i$ verschieden ist. Dieses hat für

$$(7.3) \qquad z = z_\nu = e^{\frac{i}{\ell+1}\{2\alpha+(2\nu+1)\pi\}} \qquad (\nu = 0,1,\ldots,\ell)$$

den Wert $+i$, für $z = \bar{z}_\nu$ $(\nu = 0,1,\ldots,\ell)$ den Wert $-i$ und ist sonst von $\pm i$ verschieden. Die Ausnahmepunkte liegen also alle auf der Einheitsperipherie und zwar so, daß sich die Punkte der Menge $\{z_\nu \mid \nu = 0,1,\ldots,\ell\}$ und die von $\{\bar{z}_\nu \mid \nu = 0,1,\ldots,\ell\}$ gegenseitig trennen.

Entfernt man aus $\{z \mid |z| \leq 1\}$ die Punkte $z_\nu, \bar{z}_\nu$, so ist $w_\ell(z)$ auf der so entstandenen Punktmenge regulär, also nach dem Monodromiesatz auch eindeutig. Folglich ist die Funktion

$$(7.4) \qquad u(z) = \operatorname{Re}\{w_\ell(z)\}$$

in $|z|<1$ harmonisch und auf $|z|=1$ für $z \neq z_\nu, z \neq \bar{z}_\nu$ stetig.

Ferner gilt:

$$(7.5) \qquad w_\ell(z) = M - \frac{2}{\pi}(M+m)\,\operatorname{arctg}\frac{1-z^{\ell+1}}{1+z^{\ell+1}}\operatorname{tg}\alpha\,.$$

$\frac{1-z^{\ell+1}}{1+z^{\ell+1}}$ ist auf $|z|=1$ mit Ausnahme der $2(\ell+1)$-ten Einheitswurzeln rein imaginär. Nach dem Additionstheorem des Arcustangens gilt daher auf jedem Bogen der Einheitsperipherie, der kein $z_\nu, \bar{z}_\nu$ und keine $2(\ell+1)$-te Einheitswurzel enthält:

$$u(z) = M - \frac{2}{\pi}(M+m)\operatorname{arctg} 0 . \tag{7.6}$$

Da die Arcustangensfunktion über $z=0$ nur diskreter Werte fähig ist und $u(z)$ auf $|z|=1$ für $z \neq z_\nu, z \neq \bar{z}_\nu$ stetig ist, muß $u(z)$ auf jedem Bogen, der keinen dieser Annahmepunkte enthält, konstant sein. Verfolgt man die Werte von $u(z)$ auf dem positiv orientierten Einheitskreis, so sieht man mit Hilfe der Identität

$$\operatorname{Re}\{\operatorname{arctg} z\} = \frac{1}{2}\arg\frac{z+i}{z-i} ,$$

daß $u(z)$ in $z=z_\nu$ einen Sprung der Größe $-(M+m)$ und in $z=\bar{z}_\nu$ einen Sprung der Größe $M+m$ macht.

Betrachten wir $w_\ell(z)$ für reelles, positives z, so ergibt sich unmittelbar $w_\ell(1)=M$, also

$$u(1) = M . \tag{7.7}$$

Normieren wir die Argumente der $z_\nu, \bar{z}_\nu$ durch

$$0 < \arg z_\nu < 2\pi , \qquad 0 < \arg \bar{z}_\nu < 2\pi ,$$

so wird das kleinste Argument unter den z_ν angenommen. Anderenfalls wäre nämlich $u(z)$ auf $|z|=1$ nie kleiner als M, was mit dem Verschwinden dieser Funktion im Nullpunkt nicht im Einklang stünde.

Damit sind die Randwerte von $u(z)$ auf $|z|=1$ eindeutig festgelegt. Stellen wir noch fest, daß

$$u(z) = u(\bar{z}) \tag{7.8}$$

gilt und definieren:

$$\varphi(x) = u(x + i\sqrt{1-x^2}) \qquad (-1 \leq x \leq 1), \tag{7.9}$$

dann besitzt $\varphi(x)$ genau $\ell+1$ Unstetigkeitsstellen $x=a_\nu$ mit

$$(7.10) \qquad -1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_\ell < a_{\ell+1} < 1 ,$$

hat in $x=1$ den Wert M und ist schließlich nur der Werte $M,-m$ fähig, d.h. $\varphi(x)$ ist von der gleichen Form wie die in (4.18) definierte Funktion. Schließlich genügen die a_ν dem Gleichungssystem (4.14), denn $u(z)$ gehört wegen

$$w_\ell(z) = O(z^{\ell+1}) \qquad (z \to 0)$$

sicher zur Klasse S_ℓ, erfüllt also (4.3), was für $\delta=(1,0)$ mit (4.14) äquivalent ist. $\varphi(x)$ stimmt also mit der in (4.18) eingeführten Funktion überein.

Für endliche M,m haben wir damit die Extremalfunktion von S_ℓ $(n=2, \ell=0,1,2,\ldots)$ ermittelt:

$$(7.11) \quad v(w_1) = \frac{2}{\pi}(M+m)\cdot \mathrm{Re}\left\{\operatorname{arctg} \frac{2z^{\ell+1}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\frac{M}{M+m}}{1+z^{\ell+1}+(1-z^{\ell+1})\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\cdot\frac{M}{M+m}}\right\}$$

$$(w_1=(x,y),\ z=x+iy).$$

Das Maximum dieser Funktion auf $|w_1|=r$ ist

$$(7.12) \quad M_\ell(r) = \frac{2}{\pi}(M+m)\cdot \operatorname{arctg} \frac{2r^{\ell+1}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{M}{M+m}}{1+r^{\ell+1}+(1-r^{\ell+1})\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\cdot\frac{M}{M+m}} .$$

Ist eine der beiden Größen M, m unendlich, so können wir nach (6.13) bzw. (6.22) Schranke und Extremalfunktion der Elemente aus S_ℓ $(n=2, \ell=0,1,2,\ldots)$ durch Grenzübergang von M bzw. m gegen ∞ gewinnen. Es ergibt sich dann:

$$(7.13) \quad M_\ell(r) = M\cdot\frac{2r^{\ell+1}}{1+r^{\ell+1}} , \qquad v(w_1) = M\cdot \mathrm{Re}\left\{\frac{2z^{\ell+1}}{1+z^{\ell+1}}\right\}$$

für $m=\infty$,

$$(7.14) \quad M_\ell(r) = m\cdot\frac{2r^{\ell+1}}{1-r^{\ell+1}} , \qquad v(w_1) = m\cdot \mathrm{Re}\left\{\frac{2z^{\ell+1}}{1-z^{\ell+1}}\right\}$$

für $M=\infty$.

Der Fall $n=2$ ist damit erledigt.

Wir betrachten jetzt den Fall $n=3$ mit endlichen M,m. Ist $\ell=0$ und n ungerade, etwa $n=2k+3$, so lautet (4.15):

$$\sum_{\mu=0}^{k} \binom{k}{\mu} \frac{(-1)^\mu}{2\mu+1} \cdot a_1^{2\mu+1} = \frac{M-m}{M+m} \cdot \sum_{\mu=0}^{k} \binom{k}{\mu} \frac{(-1)^\mu}{2\mu+1} \quad .$$

Hieraus folgt für $n = 3$

$$a_1 = \frac{M-m}{M+m}$$

und

$$(7.15) \qquad M_0(r) = \frac{1}{2r} \left\{ M\cdot(1+r) + m(1-r) - \frac{(M+m)(1-r^2)}{\sqrt{1+r^2-2r\,\frac{M-m}{M+m}}} \right\} .$$

Ist $\ell = 1$, so ergibt sich aus (5.13) und (5.15)

$$a_1 = -\frac{M}{M+m} \quad , \qquad a_2 = \frac{M}{M+m} \quad .$$

Deshalb ist

$$(7.16) \quad M_1(r) = M - \frac{1-r^2}{2r}(M+m) \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\,\frac{M}{M+m}}} - \frac{1}{\sqrt{1+r^2+2r\,\frac{M}{M+m}}} \right\} .$$

$\ell = 2$ soll hier nur für $M = m$ betrachtet werden. (5.13) und (5.18) liefern dann:

$$a_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \qquad a_2 = 0 \quad , \qquad a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

bzw.

$$(7.17) \quad M_2(r) = \frac{M}{r} \left\{ 1 + \frac{1-r^2}{\sqrt{1+r^2}} - \frac{1-r^2}{\sqrt{1+r^2-r\sqrt{2}}} - \frac{1-r^2}{\sqrt{1+r^2+r\sqrt{2}}} \right\} .$$

Für $\ell = 3$ erhalten wir aus (5.15)

$$a_4^3 - a_3^3 = a_4 - a_3 = \frac{M}{M+m} \quad ,$$

unter Benutzung von (5.13) also

$$(7.18) \qquad a_4 = -a_1 = \frac{\sqrt{3M^2+8Mm+4m^2} + M\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\,(M+m)} \quad ,$$

$$a_3 = -a_2 = \frac{\sqrt{3M^2+8Mm+4m^2} - M\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\,(M+m)} \quad .$$

Durch diese Größen ist $M_3(r)$ numerisch bestimmt.

Um Schranken für unendliches M oder m zu gewinnen,

könnten wir etwa in (7.15) und (7.16) M bzw. m gegen unendlich konvergieren lassen.

Wir wollen jedoch darauf verzichten und diesen Fall allgemeiner für beliebiges $n \geq 2$ und $\ell = 0,1,2,3$ untersuchen. Ist $n=2$ so ergeben sich dabei natürlich nur Spezialfälle der Ergebnisse (7.12), (7.14).

Es sei zunächst $\ell = 0$. Dann ergibt sich für $M = \infty$ nach (6.1) $c_1 = 1$ und deshalb wegen (4.16):

$$\mu_0 (1-r)^n = 1 - r^2,$$

also auf Grund von (6.8)

$$M_0(r) = m\left\{\frac{1+r}{1-r^{n-1}} - 1\right\} \qquad \text{für } M = \infty. \tag{7.19}$$

Entsprechend ist für $m = \infty$ $c_1 = -1$ und daher

$$M_0(r) = M\left\{1 - \frac{1-r}{(1+r)^{n-1}}\right\}. \tag{7.20}$$

Jetzt soll $\ell = 1$ untersucht werden. Ist $M = \infty$, so liefert (6.1) $c_1 = -1, c_2 = 1$ und (4.16):

$$(1-r)^n(\mu_0 + \mu_1) = 1 - r^2$$
$$(1+r)^n(\mu_0 - \mu_1) = 1 - r^2.$$

Aus der Lösung dieses linearen Gleichungssystems erhält man:

$$M_1(r) = m\cdot\left\{\frac{(1+r)^n + (1-r)^n}{2(1-r^2)^{n-1}} - 1\right\} \qquad \text{für } M = \infty. \tag{7.21}$$

Für $m = \infty$ muß nach (6.3) $c_1 = c_2 = 0$ sein. Das zieht

$$(1+r^2)^{\frac{n}{2}}\mu_0 = 1 - r^2$$

und

$$M_1(r) = M\cdot\left\{1 - \frac{1-r^2}{(1+r^2)^{n/2}}\right\} \tag{7.22}$$

nach sich.

Ist $\ell = 2$ und $M = \infty$, so folgt jetzt aus (6.1) nur $c_1 = c_2 = c, c_3 = 1$ mit $-1 \leq c \leq 1$. Wenn $c = 1$ gilt, besitzt die in (4.5) definierte Funktion $f(1, x; \mu_0, \mu_1, \mu_2)$ in $x = c$ eine dreifache Nullstelle, anderenfalls liegt in $x = c$ eine Doppelwurzel vor. Das führt im Fall $c < 1$ auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
(1-r)^n (\mu_0 + \mu_1 + \mu_2) &= 1 - r^2 \\
(1 + r^2 - 2rc)^{\frac{n}{2}} (\mu_0 + c\mu_1 + c^2\mu_2) &= 1 - r^2 \\
-nr\mu_0 + \{1 + r^2 - cr(n+2)\}\mu_1 + c\{2(1+r^2) - cr(n+4)\}\mu_2 &= 0
\end{aligned}$$

mit der Determinante

$$D = (1-r)^n (1 + r^2 - 2rc)^{\frac{n+2}{2}} (1-c)^2 \neq 0 .$$

Die Lösung dieses Systems liefert

$$\begin{aligned}
h(r,c) &= \mu_0 + \frac{1}{n}\mu_2 - 1 \\
&= \frac{1-r^2}{(1-c)^2} \left\{ \frac{1 + nc^2}{n(1-r)^n} + \frac{n - 1 - 2cn}{n(1 + r^2 - 2rc)^{n/2}} \cdot \frac{(1-c)(1+nc)\cdot r}{(1 + r^2 - 2rc)^{\frac{n+2}{2}}} \right\} \\
&= k(c) \cdot r^3 + O(r^4) \qquad (r \to 0),
\end{aligned}$$

wobei

$$k(c) = \frac{1}{6}(n+2)(n+4)(nc^2 + 2c + 1)$$

gilt. Diese Formel für $k(c)$ ist auch im Falle $c = 1$ richtig. Beachtet man die Bemerkung zur Ungleichung (6.12), so erkennt man, daß für alle $u(w)$ aus der hier untersuchten Funktionenklasse und alle c $(-1 \leq c \leq 1)$

$$u(w) \leq m \cdot h(r,c)$$

erfüllt ist. Diese Abschätzung ist für ein c aber scharf. Das kann jedoch nur der Wert sein, für den $k(c)$ minimal ist, also

$$c = -\frac{1}{n} .$$

Hieraus folgt

$$(7.23)\quad M_2(r) = m\cdot\left\{\frac{1-r^2}{n+1}\left(\frac{1}{(1-r)^n} + \frac{n}{(1+r^2+\frac{2}{n}r)^{n/2}}\right) - 1\right\} \text{ für } M=\infty.$$

Dieses Ergebnis zieht auf Grund von (5.22) sofort $c_1 = -1$, $c_2 = c_3 = \frac{1}{n}$ für den Fall $\ell = 2$, $m = \infty$ nach sich. Das liefert das System

$$\begin{aligned}
(1+r)^n(\mu_0 - \mu_1 + \mu_2) &= 1-r^2\\
(1+r^2-\frac{2}{n}r)^{\frac{n}{2}}\cdot(\mu_0 + \frac{1}{n}\mu_1 + \frac{1}{n^2}\mu_2) &= 1-r^2\\
-nr\mu_0 + \{1+r^2 - r\frac{n+2}{n}\}\mu_1 + \frac{1}{n}\{2(1+r^2) - r\frac{n+4}{n}\}\mu_2 &= 0\quad,
\end{aligned}$$

dessen Determinante

$$D = (1+r)^n(1+r^2-\frac{2}{n}\cdot r)^{\frac{n+2}{2}}(1+\frac{1}{n})^2$$

nicht verschwindet, das also eindeutig lösbar ist. Die Lösung führt auf

$$(7.24)\quad M_2(r) = M\cdot\left\{1 - \frac{1-r^2}{n+1}\left(\frac{1}{(1+r)^n} + \frac{n}{(1+r^2-\frac{2}{n}\cdot r)^{n/2}}\right)\right\}\quad.$$

Schließlich sei $\ell = 3$ betrachtet. Ist $M=\infty$, so folgt aus (6.1) und (5.13) $c_1 = -1$, $c_2 = c_3 = 0$, $c_4 = 1$. Es ergibt sich das System:

$$\begin{aligned}
(1+r)^n(\mu_0 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_3) &= 1-r^2\\
(1-r)^n(\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3) &= 1-r^2\\
(1+r^2)^{\frac{n}{2}}\mu_0 &= 1-r^2\\
-nr\mu_0 + (1+r^2)\mu_1 &= 0
\end{aligned}$$

mit der Determinante

$$D = 2\cdot(1-r^2)^n\cdot(1+r^2)^{\frac{n}{2}} \neq 0\,.$$

Als Schranke erhalten wir:

$$(7.25)\quad M_3(r) = m\cdot\left\{\frac{1-r^2}{2n}\left(\frac{2(n-1)}{(1+r^2)^{n/2}} + \frac{1}{(1+r)^n} + \frac{1}{(1-r)^n}\right) - 1\right\} \text{ für } M=\infty\,.$$

Gilt $m=\infty$, liefern (6.3) und (5.13)

$$c_1 = c_2 = -c\,, \qquad c_3 = c_4 = c \qquad (0 \leq c \leq 1).$$

Die Größe c läßt sich nach demselben Verfahren bestimmen, das im Falle $\ell=2, M=\infty$ zum Erfolg geführt hat. Wir wollen diese Zahl jedoch direkt aus (5.15) ermitteln:
Schreibt man dieses System in der Form:

$$(7.26)\qquad \int_0^1 (1-t)^{\frac{n-3}{2}} t^{s-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{M+m}{M} \int_{b_1}^{b_1+\varepsilon} (1-t)^{\frac{n-3}{2}} t^{s-\frac{1}{2}}\,dt \qquad s = 0,1$$

und läßt m auf einer Folge derart über alle Grenzen wachsen, daß b_1 gegen c^2 konvergiert, so kann zunächst nicht $c=1$ gelten, da sonst die rechte Seite von (7.14) für alle s den gleichen Limes besäße. $c=0$ ist aber auch unmöglich, anderenfalls ergäbe sich nämlich aus

$$\int_0^1 (1-t)^{\frac{n-3}{2}} t^{s-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{2}{2s+1} \cdot \frac{M+m}{M} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{b_1+\varepsilon}+\sqrt{b_1}} \cdot \left(2b_1+\varepsilon+\sqrt{b_1(b_1+\varepsilon)}\right)^s \cdot (1+o(1))$$

entweder das Verschwinden des linken Integrals für $s=1$ oder die Divergenz desselben für $s=0$. Es ist deshalb $0<c<1$.
Unter Berücksichtigung von

$$\int_{b_1}^{b_1+\varepsilon} (1-t)^{\frac{n-3}{2}} t^{s-\frac{1}{2}}\,dt = \varepsilon \cdot \left\{ (1-b_1)^{\frac{n-3}{2}} b_1^{s-\frac{1}{2}} + O(\varepsilon) \right\}$$

folgt dann aus (7.14) das Gleichungspaar

$$\int_0^1 (1-t)^{\frac{n-3}{2}} t^{s-\frac{1}{2}}\,dt = K(1-c^2)^{\frac{n-3}{2}} c^{2s-1}$$

mit einem positiven, von s unabhängigen K. Die Division dieser beiden Ausdrücke liefert

$$(7.27)\qquad c^2 = \frac{1}{n}\,.$$

Mit diesem Wert von c ergibt sich für $(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ das lineare Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
(1+r^2-2rc)^{n/2}\cdot(\mu_0+c\mu_1+c^2\mu_2+c^3\mu_3) &= 1-r^2\\
(1+r^2+2rc)^{n/2}\cdot(\mu_0-c\mu_1+c^2\mu_2-c^3\mu_3) &= 1-r^2\\
nr\mu_0-(1+r^2)\mu_1+(n+4)rc^2\mu_2-3c^2(1+r^2)\mu_3 &= 0\\
(n+2)\cdot r\cdot\mu_1-2(1+r^2)\mu_2+(n+6)c^2r\mu_3 &= 0
\end{aligned}
$$

mit nicht verschwindender Determinante

$$D = 8c^3\left\{(1+r^2)^2-4r^2c^2\right\}^{\frac{n+2}{2}}.$$

Die Lösung dieses Systems führt auf die Schranke

$$(7.28)\qquad M_3(r) = M\left\{1-\frac{1-r^2}{2}\left(\frac{1}{(1+r^2-2r\frac{1}{\sqrt{n}})^{n/2}}+\frac{1}{(1+r^2+2r\frac{1}{\sqrt{n}})^{n/2}}\right)\right\}\quad \text{für } m=\infty.$$

8. Ein Problem von R. M. Gabriel: Es sei G ein Gebiet im n-dimensionalen euklidischen Raum R^n ($n \geq 3$), das die Green'sche Funktion

$$(8.1)\qquad g(x,\eta) = |x-\eta|^{2-n} - c(\eta) + h(x,\eta)$$

mit

$$(8.2)\qquad h(\eta,\eta) = 0$$

besitzt. In jedem endlichen Randpunkt von G gilt

$$g(x,\eta)\cdot|x-\eta|^{2-n} < 0.$$

Für $G \neq R^n$ ist diese Relation nach dem Maximumprinzip dann überall in G richtig, speziell in $x=\eta$:

$$(8.3)\qquad 0 < c(\eta) = R^{2-n}, \qquad R>0.$$

Die Größe $R = R(\eta,G)$ heißt innerer Radius von η bzgl. G. Ist $G\subset G^*$ und $g^*(x,\eta)$ die Green'sche Funktion von G^*, zieht

$$g(x,\eta) < g^*(x,\eta) \qquad (\{x,\eta\}\subset G,\ x\neq\eta)$$

die Ungleichung

$$R(\mathfrak{a},G) < R(\mathfrak{a},G^*) \qquad (G \subset G^*) \tag{8.4}$$

nach sich.

Definiert man $\varrho^* = \varrho^*(G) = +\infty$ für unbeschränkte Gebiete G und sonst

$$\varrho^* = \varrho^*(G) = \operatorname{Min}\{\varrho_1 \mid G \subseteq \{x \mid |x-m| < \varrho_1\} \text{ für ein } m \in R^n\}, \tag{8.5}$$

sowie

$$\varrho = \varrho(\mathfrak{a},G) = \operatorname{Max}\{\varrho_1 \mid \{x \mid |x-\mathfrak{a}| < \varrho_1\} \subseteq G\}, \tag{8.6}$$

folgt aus (8.4)

$$\varrho(\mathfrak{a},G) \leq R(\mathfrak{a},G) \leq \varrho^*(G). \tag{8.7}$$

Das Gleichheitszeichen kann hier nur gelten, wenn G eine Kugel mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{a}$ ist.

Wir machen nun eine Voraussetzung über den Rand von G, die etwas schwächer ist als die von Gabriel geforderte Konvexität:

Es möge bei festem $\mathfrak{a}$ eine Kugelfläche oder eine Hyperebene Γ^* geben, die zu G disjunkt ist und in einem Randpunkt $\mathfrak{x}$ von G auf der Verbindungsstrecke von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$ senkrecht steht. $\mathfrak{x}$ soll der Gleichung

$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{a}| = \varrho(\mathfrak{a},G) \tag{8.8}$$

genügen.

G^* sei dann das Gebiet, das G umfaßt und Γ^* im endlichen als Rand besitzt. Ist Γ^* Hyperebene, so ordnen wir G^* die Zahl $k = 0$ zu. Anderenfalls definieren wir $|k|$ als reziproken Radius von Γ^* und geben k positives Vorzeichen, wenn G^* das Äußere, und negatives, wenn G^* das Innere von Γ^* ist.

Nach (8.7) ist hierbei notwendig

(8.9) $$k \geq -R^{-1} .$$

Als Green'sche Funktion von G^* ergibt sich

(8.10) $$g^*(\mathfrak{w},\mathfrak{z}) = |\mathfrak{w}-\mathfrak{z}|^{2-n} - |(\mathfrak{w}-\mathfrak{z})(1+k\varrho)+(\mathfrak{z}-\mathfrak{z})|^{2-n} .$$

Wegen (8.4) folgt hieraus für den inneren Radius von G

$$R \leq \varrho(2+k\varrho) .$$

Also kann ϱ nicht kleiner sein als die positive Nullstelle

(8.11) $$\varrho_0 = \frac{1}{k}\left\{\sqrt{1+kR} - 1\right\} \quad \text{für} \quad k \neq 0 ,$$

$$\varrho_0 = \frac{1}{2} R \qquad \text{für} \quad k = 0$$

des Polynoms $P(x) = x\cdot(2+kx) - R$. D.h.

(8.12) $$\varrho \geq \varrho_0 .$$

Das Gleichheitszeichen gilt für $G = G^*$.

Auf dem Rande von G besteht daher die Ungleichung

$$h(\mathfrak{w},\mathfrak{z}) - R^{2-n} = g(\mathfrak{w},\mathfrak{z}) - |\mathfrak{w}-\mathfrak{z}|^{2-n} \geq -\varrho_0^{2-n},$$

die nach dem Maximumprinzip auch im Gebiet gilt:

(8.13) $$g(\mathfrak{w},\mathfrak{z}) \geq |\mathfrak{w}-\mathfrak{z}|^{2-n} - \varrho_0^{2-n}$$

$$h(\mathfrak{w},\mathfrak{z}) \geq R^{2-n} - \varrho_0^{2-n} = -h_1(|\mathfrak{w}-\mathfrak{z}|) .$$

Diese Abschätzung ist - wie man für $G = G^*$ in $\mathfrak{w} = \mathfrak{z}$ sieht - auf dem Rande von G genau.

Nach oben läßt sich $g(\mathfrak{w},\mathfrak{z})$ durch $g^*(\mathfrak{w},\mathfrak{z})$ abschätzen. Diese Funktion ist bei festem $|\mathfrak{w}-\mathfrak{z}|$ maximal, wenn die Vektoren $\mathfrak{w}-\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}-\mathfrak{z}$ antiparallel sind:

$$g(\mathfrak{w},\mathfrak{z}) \leq |\mathfrak{w}-\mathfrak{z}|^{2-n} - \left\{|\mathfrak{w}-\mathfrak{z}|(1+k\varrho)+\varrho(2+k\varrho)\right\}^{2-n}.$$

Für $k \geq 0$ kann hierbei ϱ durch R ersetzt werden. Anderenfalls wird $\varrho(2+k\varrho) \leq R(2+kR)$ und (8.12) ausgenutzt:

(8.14)
$$g(x,\eta) \leq |x-\eta|^{2-n} - \{|x-\eta|\cdot(1+kR) + R(2+kR)\}^{2-n},$$
$$h(x,\eta) \leq R^{2-n} - \{|x-\eta|\cdot(1+kR) + R(2+kR)\}^{2-n}$$
$$= h_2(|x-\eta|) \quad \text{für } k \geq 0,$$

$$g(x,\eta) \leq |x-\eta|^{2-n} - \{|x-\eta|\cdot\sqrt{1+kR} + R(2+kR)\}^{2-n},$$
$$h(x,\eta) \leq R^{2-n} - \{|x-\eta|\cdot\sqrt{1+kR} + R(2+kR)\}^{2-n}$$
$$= h_2(|x-\eta|) \quad \text{für } k < 0.$$

Ist $k \geq 0$ und $G = G^*$, so ist (8.14) für $|x-\eta| \to \infty$ genau.

Die nach der Methode von Gabriel hergeleiteten Ungleichungen (8.13), (8.14) berücksichtigen nicht den Umstand, daß $h(x,\eta)$ in $x = \eta$ verschwindet. Dieser Tatsache können wir etwa unter Benutzung von (7.20) Rechnung tragen und die genannten Abschätzungen in der Umgebung von $x = \eta$ verbessern:

(8.15)
$$-h_1(\varrho_0)\left\{1 - \frac{(\varrho_0 - |x-\eta|)\varrho_0^{n-2}}{(\varrho_0+|x-\eta|)^{n-1}}\right\} \leq h(x,\eta) \leq h_2(\varrho_0)\left\{1 - \frac{(\varrho_0 - |x-\eta|)\cdot\varrho_0^{n-2}}{(\varrho_0+|x-\eta|)^{n-1}}\right\}$$
$$\text{für } |x-\eta| \leq \varrho_0.$$

Ist $n=3$, so kann statt (7.20) die Abschätzung (7.15) herangezogen werden.

Lebenslauf.

Ich, Hanns - Walter Rohde, wurde am 11.4.1936 in Berlin-Lichterfelde als Sohn des Oberstudiendirektors Walter Rohde und seiner Ehefrau Lucie, geb. Beese geboren.

Nach Absolvierung der Grundschule besuchte ich die Tannenbergschule in Berlin - Lichterfelde, an der ich am 15.3.1955 die Reifeprüfung ablegte. Im Sommersemester des gleichen Jahres wurde ich an der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät der Freien Universität zu Berlin für das Hauptfach Mathematik immatrikuliert. Im Sommersemester 1958 habe ich dort die Diplomvorprüfung und im Wintersemester 1960/61 die Diplomhauptprüfung bestanden.

Im Laufe meines Studiums habe ich insbesondere Vorlesungen bei Herrn Professor Dr. Dinghas, Herrn Professor Dr. Grotemeyer, Herrn Professor Dr. Ostmann und Herrn Professor Dr. Stöhr gehört, denen ich zu großem Dank verpflichtet bin.